Heiko Dumlich 1. November 2007

2 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

2.1 (Invarianz durch Hilfe der Lorentz-Transformation)

z.z.: $p \cdot p$ ist invariant, d.h. $p \cdot p = p' \cdot p'$

Das Skalarprodukt von Vierervektoren ist definiert als

$$p \cdot p = p_0 \cdot p_0 - \vec{p} \cdot \vec{p}$$

(Konvention: Wir nutzen $[a \cdot b]_{4V}$ als Skalarproduktoperation für Vierervektoren, wobei a bzw. b Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind).

Wir betrachten $p \cdot p$ und $p' \cdot p'$ explizit:

$$p \cdot p = \left[\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \right]_{4V} = \frac{E^2}{c^2} - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

$$p' \cdot p' = \left[\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} & p'_x & p'_y & p'_z \end{pmatrix} \right]_{4V} = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \left((p'_x)^2 + \left(p'_y\right)^2 + (p'_z)^2\right)$$

Es gilt jedoch mit Lorentz-Transformation (in x-Richtung):

$$p' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Rechnung führt zu:

$$p' \cdot p' = \left[\begin{pmatrix} \gamma\frac{E}{c} - \beta\gamma p_x \\ -\beta\gamma\frac{E}{c} + \gamma p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma\frac{E}{c} - \beta\gamma p_x & -\beta\gamma\frac{E}{c} + \gamma p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \right]_{4V}$$

Dies ist jedoch mit der Definition des Skalarprodukts für Vierervektoren:

$$p' \cdot p' = \left(\gamma\frac{E}{c} - \beta\gamma p_x\right)^2 - \left[\left(-\beta\gamma\frac{E}{c} + \gamma p_x\right)^2 + p_y^2 + p_z^2\right]$$

Das ist aber:

$$\begin{aligned} p' \cdot p' &= \gamma^2\frac{E^2}{c^2} - 2\beta\gamma^2\frac{E}{c}p_x + \beta^2\gamma^2 p_x^2 - \gamma^2 p_x^2 + 2\beta\gamma^2\frac{E}{c}p_x - \beta^2\gamma^2\frac{E^2}{c^2} - p_y^2 - p_z^2 \\ &= \gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left[\frac{E^2}{c^2} - p_x^2\right] - p_y^2 - p_z^2 \end{aligned}$$

Mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ folgt:

$$p' \cdot p' = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = p \cdot p$$

Die Berechnung für y- und z-Richtung gehen äquivalent. Da sie nicht explizit in der Vorlesung angegeben wurden, gehen wir davon aus, dass eine extra Berechnung nicht notwendig ist und der Fall für die x-Richtung ausreicht.

2.2 (kombinierte Lorentz-Transformation)

Die Lorentztransformation in Matrixdarstellung hat folgende Form:

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\beta\gamma(\beta) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(\beta) & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei in $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ auch eine β-Abhängigkeit steckt.

Es ist zu zeigen, dass die Matrizen mit β als Parameter eine kontinuierliche Gruppe bilden.

1) Abgeschlossenheit

Wir betrachten die Hintereinanderausführung von zwei Lorentztransformationen:

$$\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j) = \begin{pmatrix} \gamma_i & -\beta_i\gamma_i & 0 & 0 \\ -\beta_i\gamma_i & \gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_j & -\beta_j\gamma_j & 0 & 0 \\ -\beta_j\gamma_j & \gamma_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies liefert:

$$\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j) = \begin{pmatrix} \gamma_i\gamma_j + \beta_i\gamma_i\beta_j\gamma_j & -\gamma_i\beta_j\gamma_j - \beta_i\gamma_i\gamma_j & 0 & 0 \\ -\beta_i\gamma_i\gamma_j - \gamma_i\beta_j\gamma_j & \beta_i\gamma_i\beta_j\gamma_j + \gamma_i\gamma_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

umgeschrieben zur Übersicht:

$$\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j) = \begin{pmatrix} \gamma_i\gamma_j(1+\beta_i\beta_j) & -\gamma_i\gamma_j(\beta_i+\beta_j) & 0 & 0 \\ -\gamma_i\gamma_j(\beta_i+\beta_j) & \gamma_i\gamma_j(1+\beta_i\beta_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können vergleichen mit der Lorentztransformation und finden die Bedingung:

$$\begin{aligned} \gamma(\beta) &= \gamma_i\gamma_j(1+\beta_i\beta_j) \geq 1 \\ -\beta\gamma(\beta) &= -\gamma_i\gamma_j(\beta_i+\beta_j) \end{aligned}$$

wobei $\beta \in]-1,1[$, das die Beziehung:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_i + \beta_j}{(1 + \beta_i \beta_j)}$$

erfüllt, welche wir aus Teilen der zweiten durch die ersten Zeile erhalten. Zudem ist somit gezeigt, dass für die kombinierte LT dies gilt.

Damit gilt also:

$$\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j) = \Lambda(\beta_k)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \gamma_i \gamma_j (1 + \beta_i \beta_j) \\ \beta_k &= \frac{\beta_i + \beta_j}{(1 + \beta_i \beta_j)} \end{aligned}$$

2) Einselement

Wir suchen das Einselement für diese Gruppe. Die 4x4-Einheitsmatrix kann sofort als Einslement identifiziert werden:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Inverses Element

Wir prüfen, ob jedes Element der Gruppe ein inverses besitzt. Der erste Ansatz ist es für β folgerrichtig $-\beta$ zu probieren (mit $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(-\beta)$). Dies führt auf:

$$\Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\beta\gamma(\beta) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(\beta) & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & \beta\gamma(\beta) & 0 & 0 \\ \beta\gamma(\beta) & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation sollte das Einselement E liefern:

$$\Lambda(\beta) . \Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\beta\gamma(\beta) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(\beta) & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & \beta\gamma(\beta) & 0 & 0 \\ \beta\gamma(\beta) & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dies liefert:

$$\Lambda(\beta) . \Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma^2(\beta) - \beta^2\gamma^2(\beta) & \beta\gamma^2(\beta) - \beta\gamma^2(\beta) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2(\beta) + \beta\gamma^2(\beta) & -\beta^2\gamma^2(\beta) + \gamma^2(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\gamma^2(\beta) - \beta^2\gamma^2(\beta) = \gamma^2(\beta)\left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{(1-\beta^2)}\left(1-\beta^2\right) = 1$ folgt wie gefordert:

$$\Lambda(\beta).\Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}$$

4) Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz gilt allgemein für die Matrizenmultiplikation, also auch speziell für die Multiplikation der Matrizen der Lorentztransformation, d.h. es gilt:

$$[\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j)] \cdot \Lambda(\beta_k) = \Lambda(\beta_i) \cdot [\Lambda(\beta_j) \cdot \Lambda(\beta_k)]$$

Somit bilden diese Matrizen eine kontinuierliche Gruppe.

5) Kommutativgesetz

Es ist weiterhin zu prüfen ob die Gruppe abelsch ist. Wir prüfen die Kommutativität:

$$\Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j) \stackrel{?}{=} \Lambda(\beta_j) \cdot \Lambda(\beta_i)$$

Es gilt:

$$\Lambda(\beta_j) \cdot \Lambda(\beta_i) = \begin{pmatrix} \gamma_j\gamma_i(1+\beta_j\beta_i) & -\gamma_j\gamma_i(\beta_j+\beta_i) & 0 & 0 \\ -\gamma_j\gamma_i(\beta_j+\beta_i) & \gamma_j\gamma_i(1+\beta_j\beta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda(\beta_i) \cdot \Lambda(\beta_j)$$

somit also auch:

$$\beta_{ji} = \frac{\beta_j + \beta_i}{(1+\beta_j\beta_i)} = \beta_{ij}$$

d.h. die Gruppe ist unter dieser Operation kommutativ, somit also auch abelsch.

2.3 (Schwellenenergie)

Aus der Vorlesung kennen wir die Schwellenenergie für die Antiprotonenproduktion für den Fall eines ruhenden Target-Protons. Wir betrachten nun den Fall, dass die Protonen und Neutronen innerhalb eines Kernes einen nicht zu vernachlässigenden Impuls besitzen. Dies nennt man Fermi-Effekt, wobei dieser die Schwellenenergie erheblich erniedrigt. Es ist zu zeigen, dass unter Berücksichtigung dieses Effektes die Schwellenenergie etwa

$$E'_{\mathrm{SCHW}} \approx \left(1 - \frac{p}{m_p c}\right) E_{\mathrm{SCHW}}$$

beträgt. Für die Antiprotonenproduktion gilt die Reaktion:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Wir nutzen unser Wissen aus **Aufgabe 3**:

Es gilt im Laborsystem:

$$p_{\text{Lab}} = p_A + p_B$$

mit p_A und p_B den Protonenimpulsen. Wir quadrieren:

$$p_{\text{Lab}} \cdot p_{\text{Lab}} = p_A \cdot p_A + p_B \cdot p_B + 2p_A \cdot p_B$$

Unter der Verwendung der Beziehung $p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$ folgt:

$$p^2_{\text{Lab}} = m^2_A c^2 + m^2_B c^2 + 2\frac{E_A E_B}{c^2} - 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

mit der Energie-Impuls-Beziehung der SRT

$$p^2_{\text{Lab}} = m^2_A c^2 + m^2_B c^2 + 2\frac{E_A\sqrt{\vec{p}^2_B c^2 + m^2_B c^4}}{c^2} - 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

Unter der Annahme, dass die Impulse $\vec{p}_A$ und $\vec{p}_B$ entgegengesetzt sind (dies führt zur minimalen Schwellenenergie), folgt mit $\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B = -|\vec{p}_A| \cdot |\vec{p}_B|$:

$$p^2_{\text{Lab}} = m^2_A c^2 + m^2_B c^2 + 2\frac{E_A\sqrt{\vec{p}^2_B c^2 + m^2_B c^4}}{c^2} + 2\,|\vec{p}_A| \cdot |\vec{p}_B|$$

Weiter können wir davon ausgehen, dass $\vec{p}_A$ das beschleunigte Proton ist, während $\vec{p}_B$ das "Kernproton" ist, welches den Fermieffekt verursacht, dann ist $|\vec{p}_A|$ groß. Somit folgt dann für $|\vec{p}_A|\,c = \sqrt{\vec{p}^2{}_A c^2} \approx \sqrt{\vec{p}^2{}_A c^2 + m^2_p c^4} = E_A$. Einsetzen liefert (wobei wir gleich $m_A = m_B = m_p$ einsetzen):

$$p^2_{\text{Lab}} = 2m^2_p c^2 + 2\frac{E_A\sqrt{\vec{p}^2_B c^2 + m^2_p c^4}}{c^2} + 2\frac{E_A}{c} \cdot |\vec{p}_B|$$

Betrachten wir nun das CM-System (center of momentum),

$$p_{\text{Lab}} = p_A + p_B + p_C + p_D$$

mit p_A, p_B, p_C den Protonenimpulsen und p_D dem Antiprotonenimpuls. Für das CM-System gilt $\vec{p}_{tot} = 0$, somit:

$$p_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} \frac{E_i}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_A}{c} + \frac{E_B}{c} + \frac{E_C}{c} + \frac{E_D}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m_p c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei wir angenommen haben, dass die Massen von Protonen und Antiprotonen identisch sind.

Auf Grund der Lorentzinvarianz gilt nun:

$$p^2_{\text{CM}} = p^2_{\text{Lab}}$$

einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
(4m_pc)^2 &= 2m_p^2c^2 + 2\frac{E_A\sqrt{\vec{p}_B^2c^2 + m_p^2c^4}}{c^2} + 2\frac{E_A}{c}\cdot|\vec{p}_B| \\
16m_p^2c^2 - 2m_p^2c^2 &= 2E_A\left(\frac{\sqrt{\vec{p}_B^2c^2 + m_p^2c^4}}{c^2} + \frac{|\vec{p}_B|}{c}\right) \\
E_A &= \frac{7m_p^2c^2}{\left(\frac{\sqrt{\vec{p}_B^2c^2+m_p^2c^4}}{c^2} + \frac{|\vec{p}_B|}{c}\right)}
\end{aligned}$$

Umgeschrieben:

$$E_A = \frac{m_pc^2}{\sqrt{\vec{p}_B^2c^2 + m_p^2c^4} + |\vec{p}_B|\,c}\cdot 7m_pc^2$$

Es bleibt der Vorfaktor zu entwickeln, wobei wir bereits $7m_pc^2$ als E_{SCHW}, E_A als E'_{SCHW} und $|\vec{p}_B|$ als p identifizieren können:

$$E'_{\text{SCHW}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_p^2c^2}} + \frac{p}{m_pc}}\cdot E_{\text{SCHW}}$$

Wir können den Nenner noch um $\frac{p}{m_pc} = x = 0$ entwickeln. Hierzu berechnen wir zuerst die erste Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$

Diese liefert:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x + 1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} \\
&= -\frac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \\
&= -\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung liefert:

$$E'_{\text{SCHW}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}+x_0} - \frac{1}{1+x_0^2+x_0\sqrt{1+x_0^2}}\left(\frac{p}{m_pc} - x_0\right) \pm \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m_p^2c^2}\right)\right)_{x_0=0}\cdot E_{\text{SCHW}}$$

Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung führt uns sogleich auf:

$$E'_{\mathrm{SCHW}} \approx \left(1 - \frac{p}{m_p c}\right) E_{\mathrm{SCHW}}$$

$\square$

Mit der Formel für die Schwellenenergie mit Fermi-Effekt, $E_{\mathrm{SCHW}} = 7\, m_p c^2$ und $p = 250\, \frac{\mathrm{MeV}}{c}$ als einen typischen Wert für den Betrag eines mittleren Impulses eines Protons innerhalb eines Kerns folgt für die Schwellenenergie mit Fermieffekt E'_{SCHW}:

$$E'_{\mathrm{SCHW}} = \left(1 - \frac{p}{m_p c}\right) 7\, m_p c^2 = 7 \cdot \left(m_p c^2 - pc\right) = 4.82\,\mathrm{GeV}$$

D.h. ca. $\frac{3}{4}$ des Wertes ohne den Fermi-Effekt.

2.4 (Teilchenunterscheidung)

Wir betrachten zwei Teilchentypen mit den Massen m_1 und m_2 mit dem gemeinsamen Impuls p, welche eine Strecke L zwischen zwei Szintillationszählern durchlaufen. Es ist zu zeigen, dass der Unterschied der Flugzeiten $\Delta t = t_2 - t_1$ ($t_i = t\,(m_i)$, $i = 1, 2$) für große Impulse mit p^{-2} abnimmt. Es gilt für die Flugzeit:

$$t = \frac{L}{v}$$

Die Geschwindigkeit erhalten wir aus dem Impuls $p = v \frac{E}{c^2} \Leftrightarrow v = \frac{pc}{E} \cdot c$, mit der Energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$:

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \cdot c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}}} \cdot c \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \frac{1}{c}$$

Unter der Annahme großer Impulse ist $v \approx c$, d.h. $\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \approx 1$. Wir können also um $\left(\frac{mc}{p}\right)^2 = 0$ die Wurzel entwickeln:

$$\frac{1}{v} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{p^2} \mp \mathcal{O}\left(\left(\frac{mc}{p}\right)^4\right)\right) \cdot \frac{1}{c}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung erhalten wir also für die Geschwindigkeit für große Impulse:

$$\frac{1}{v} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{c}$$

Daraus folgt für den Unterschied der Flugzeit:

$$
\begin{aligned}
\Delta t &= |t_2 - t_1| \\
&= L\left|\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right| \\
&= L\left|\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2c^2}{p^2}\right)\cdot\frac{1}{c} - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2c^2}{p^2}\right)\cdot\frac{1}{c}\right| \\
&= L\left|\frac{1}{2}\frac{m_1^2c}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{m_2^2c}{p^2}\right| \\
&= L\left|\frac{1}{2}\frac{c}{p^2}\left(m_1^2 - m_2^2\right)\right| \\
&= \underbrace{\frac{Lc}{2}\left|\left(m_1^2 - m_2^2\right)\right|}_{c}\cdot p^{-2}
\end{aligned}
$$

Somit folgt für große Impulse:

$$\Delta t = c \cdot \frac{1}{p^2}$$

□

Es ist der minimal erforderliche Flugweg L zu bestimmen, mit dem man Pionen von Kaonen unterscheiden kann. Es gilt für den Flugweg:

$$L = \frac{2p^2c^2}{|(m_1^2c^4 - m_2^2c^4)|}\cdot c\Delta t$$

Mit $\Delta t = 200\,\mathrm{ps}$, einem Impuls von $p = 3\,\mathrm{GeV}/c$, $m_{\pi^0} = 139.57018\,\mathrm{MeV}/c^2$ und $m_{K^0} = 497.648\,\mathrm{MeV}/c^2$ folgt für den minimal zur Unterscheidung erforderlichen Flugweg:

$$L = 4.71\,\mathrm{m}$$