Heiko Dumlich 25. Oktober 2007

1 Übungsblatt Kern und Teilchenphysik

1.1 (Muonen)

Muonen werden in einer Höhe von $h = 8000\,\mathrm{m}$ erzeugt und bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit $v = 0.998\,c$, mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Auf der Erde wird ein Fluss von $\phi \sim 180\,\frac{\mathrm{m}^{-2}}{\mathrm{s}}$ beobachtet, d.h. die Teilchen erreichen den Erdboden. Die Lebensdauer der Muonen beträgt $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Gemäß nicht relativistischer Mechanik, beträgt die Reichweite der Muonen also:

$$s = v\tau = 0.998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 658.68\,\mathrm{m}$$

Sie würden daher den Erdboden nicht erreichen. Da sie jedoch beobachtet werden und Sie eine Geschwindigkeit von 99.8 % der Lichtgeschwindigkeit besitzen, muss die relativistische Mechanik benutzt werden. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Zeitdilatation für die Lebensdauer der Muonen ($\tau' = \gamma\tau$):

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(0.998)^2}}\tau = 34.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

Das bedeutet andererseits, dass sie eine Strecke von

$$s = v\tau' = 0.998 \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot 34.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 10419.86\,\mathrm{m}$$

Somit ist die Weglänge also ca. 15 mal so groß wie in der Rechnung mit der nicht relativistischen Mechanik. Die Teilchen erreichen in diesem Fall, wie beobachtet den Erdboden.

1.2 (Zerfall eines neutralen Teilchens)

Die Impulse sind als Graphik im *mathematica* Ausdruck im Anhang zu finden. Wir betrachten die einzelnen auftretenden Teilchen:

Teilchen	Masse in MeV/c^2
p	938.27203
$\pi^{\pm}$	139.57018
K^0	497.648
Λ	1115.683

Es ist zu bestimmen, welcher der beiden Zerfälle:

$$\begin{aligned} K_s^0 &\rightarrow \pi^+\pi^- \\ \Lambda &\rightarrow p\pi^- \end{aligned}$$

vorliegt. Wir betrachten die Impulserhaltung:

$$p_{X^0} = p_{A^+} + p_{B^-}$$

Für das Skalarprodukt gilt dann:

$$p_{X^0} \cdot p_{X^0} = p_{A^+} \cdot p_{A^+} + p_{B^-} \cdot p_{B^-} + 2p_{A^+} \cdot p_{B^-}$$

Dies können wir mit $p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$ (Herleitung siehe Vorlesung) umformen zu:

$$m_{X^0}^2 c^2 = m_{A^+}^2 c^2 + m_{B^-}^2 c^2 + 2\left(\frac{E_{A^+}}{c}\frac{E_{B^-}}{c} - \vec{p}_{A^+} \cdot \vec{p}_{B^-}\right)$$

Die Energie-Impuls-Beziehung der SRT lautet:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

setzen wir das E aus dieser Beziehung ein, erhalten wir:

$$m_{X^0}^2 c^2 = m_{A^+}^2 c^2 + m_{B^-}^2 c^2 + 2\left(\sqrt{\vec{p}_{A^+}^2 + m_{A^+}^2 c^2}\sqrt{\vec{p}_{B^-}^2 + m_{B^-}^2 c^2} - \vec{p}_{A^+} \cdot \vec{p}_{B^-}\right)$$

Somit folgt für unsere Bestimmungsformel (wenn wir diese direkt in Energien haben möchten, wobei unsere Massen in Einheiten von $\frac{eV}{c^2}$ auftreten):

$$m_{X^0}^2 c^4 = m_{A^+}^2 c^4 + m_{B^-}^2 c^4 + 2\left(\sqrt{\vec{p}_{A^+}^2 c^2 + m_{A^+}^2 c^4}\sqrt{\vec{p}_{B^-}^2 c^2 + m_{B^-}^2 c^4} - \vec{p}_{A^+} \cdot \vec{p}_{B^-} c^2\right)$$

Wir können nun die gegebenen Werte einsetzen und durch Vergleich den zu erwartenden Zerfall bestimmen. Es gilt $\vec{p}_{A^+}^2 = 4.68635\,\frac{\mathrm{GeV}^2}{c^2}$, $\vec{p}_{B^-}^2 = 0.303721\,\frac{\mathrm{GeV}^2}{c^2}$ und $\vec{p}_{A^+} \cdot \vec{p}_{B^-} = 1.15031\,\frac{\mathrm{GeV}^2}{c^2}$. Die Massen nehmen wir aus der Tabelle und finden für den Zerfall

$$K_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$$

$$0.247654\,\mathrm{GeV}^2 = 0.20485\,\mathrm{GeV}^2$$

Die Abweichung beträgt hier also ca. 17.28 % (siehe *mathematica*).
Der zweite Zerfall

$$\Lambda \rightarrow p\pi^-$$

liefert:

$$1.24475\,\mathrm{GeV}^2 = 1.28186\,\mathrm{GeV}^2$$

Dies entspricht einer Abweichung von ca. 2.98 % und ist somit sehr viel geringer als der für den ersten Zerfall ermittelte Wert. Daher gehen wir davon aus, dass der Zerfall $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ vorliegt.

1.3 (Stoß eines bewegten mit einem ruhenden Teilchen)

Es ist zu zeigen, dass die Schwellenenergie gegeben ist als:

$$E = \frac{\left(M^2 - m_A^2 - m_B^2\right)}{2m_B} c^2$$

mit $M = \sum_i m_i$. Es gilt im Laborsystem:

$$p_{\text{Lab}} = p_A + p_B$$

wir quadrieren wieder:

$$p_{\text{Lab}} \cdot p_{\text{Lab}} = p_A \cdot p_A + p_B \cdot p_B + 2p_A \cdot p_B$$

Unter der Verwendung der Beziehung $p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$ folgt:

$$p_{\text{Lab}}^2 = m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2\frac{E_AE_B}{c^2} - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

mit der Energie-Impuls-Beziehung der SRT

$$p_{\text{Lab}}^2 = m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2\frac{E_A\sqrt{\vec{p}_B^2c^2 + m_B^2c^4}}{c^2} - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$$

nach Ausnutzen der Vorraussetzung (ruhendes Teilchen B) $\vec{p}_B = 0$, folgt somit vereinfachend:

$$p_{\text{Lab}}^2 = m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2E_Am_B$$

Wir betrachten die Schwellenenergie, d.h. die erzeugten Teilchen besitzen jeweils die Ruheenergie $E_i = m_ic^2$. D.h., wenn wir über alle Ruheenergien (bzw. entstandene Teilchen) summieren, erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N m_ic^2 = Mc^2$$

mit $M = \sum_i m_i$ (siehe Aufgabenstellung).

Betrachten wir nun das CM-System (center of momentum), für dieses gilt $\vec{p}_{tot} = 0$, somit:

$$p_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auf Grund der Lorentzinvarianz gilt nun:

$$p_{\text{CM}}^2 = p_{\text{Lab}}^2$$

einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} M^2c^2 &= m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2E_Am_B \\ 2E_Am_B &= \left(M^2 - m_A^2 - m_B^2\right)c^2 \\ E_A &= \frac{\left(M^2 - m_A^2 - m_B^2\right)}{2m_B}c^2 \end{aligned}$$

$\square$

a)

Wir betrachten den Prozess:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$$

mit $m_p = 938.27203\,\mathrm{MeV}/c^2$ und $m_{\pi^\pm} = 139.57018\,\mathrm{MeV}/c^2$. Einsetzen in die Schwellenenergieformel liefert:

$$E = \frac{\left(4 \cdot (139.57018 + 938.27203)^2 - 2 \cdot 938.27203^2\right)}{2 \cdot 938.27203}\,\mathrm{MeV} = 1538.07554\,\mathrm{MeV}$$

b)

Wir betrachten den Prozess:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$$

mit $m_p = 938.27203\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\pi^\pm} = 139.57018\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{K^0} = 497.648\,\mathrm{MeV}/c^2$ und $m_{\Sigma^0} = 1192.642\,\mathrm{MeV}/c^2$. Einsetzen in die Schwellenenergieformel liefert:

$$E = \frac{\left((497.648 + 1192.642)^2 - 139.57018^2 - 938.27203^2\right)}{2 \cdot 938.27203}\,\mathrm{MeV} = 1043.006\,\mathrm{MeV}$$

für den Fall:

$$p + \pi^- \rightarrow K^0 + \Sigma^0$$

folgt:

$$E = \frac{\left((497.648 + 1192.642)^2 - 139.57018^2 - 938.27203^2\right)}{2 \cdot 139.57018}\,\mathrm{MeV} = 7011.694\,\mathrm{MeV}$$

dieser ist jedoch eher schwer experimentell durchzuführen, da ein Target mit geringer Lebensdauer nicht als Target geeignet ist, zudem müsste es erzeugt und dann für den Stoß abgebremst werden, was einen zusätzlichen erheblichen Aufwand verursachen würde.

c)

Wir betrachten den Prozess:

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^0$$

mit $m_p = 938.27203\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{K^0} = 497.648\,\mathrm{MeV}/c^2$ und $m_{\Sigma^+} = 1189.37\,\mathrm{MeV}/c^2$. Einsetzen in die Schwellenenergieformel liefert:

$$E = \frac{\left((938.27203 + 497.648 + 1189.37)^2 - 2 \cdot 938.27203^2\right)}{2 \cdot 938.27203}\,\mathrm{MeV} = 2734.52\,\mathrm{MeV}$$

1.4 (Neutrino-Oszillationsexperiment)

Wir betrachten hochenergetische Neutrinostrahlen, welche aus den folgenden zwei Zerfällen gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \end{aligned}$$

a)

Wir betrachten einen $E = 200\,\mathrm{GeV}$ Strahl und bestimmen den Anteil, welcher auf einer Strecke von 100 m zerfällt. Hierzu betrachten wir zuerst die Geschwindigkeit der Pionen und Kaonen. Es gilt

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

Wir können also zuerst γ bestimmen, um dann auf v zu schließen. Mit $m_{K^+} = 0.493677\,\mathrm{GeV}/c^2$ und $m_{\pi^\pm} = 0.13957018\,\mathrm{GeV}/c^2$ folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_{K^+} &= \frac{200\,\mathrm{GeV}}{0.493677\,\mathrm{GeV}} = 405.12 \\ \gamma_{\pi^+} &= \frac{200\,\mathrm{GeV}}{0.13957018\,\mathrm{GeV}} = 1432.97 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} v_{K^+} &= 0.999996953 \cdot c \\ v_{\pi^+} &= 0.999999513 \cdot c \end{aligned}$$

Somit folgt für die Flugzeiten $t = \frac{s}{v}$ (mit $c = 3 \cdot 10^{-8}$):

$$\begin{aligned} t_{K^+} &= 3.33 \cdot 10^{-7} \\ t_{\pi^+} &= 3.33 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Die Lebensdauern sind gegeben mit:

$$\begin{aligned} \tau_{K^+} &= 1.2385 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \\ \tau_{\pi^+} &= 2.6033 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Auf Grund der hohen Geschwindigkeit der Kaonen und Pionen müssen wir relativistisch rechnen, d.h. wir betrachten die Zeitdilatation $\tau' = \gamma\tau$, welche die Lebensdauern erhöht auf:

$$\begin{aligned} \tau'_{K^+} &= 5.0175 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \\ \tau'_{\pi^+} &= 3.7304 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Mit dem Zerfallgesetz:

$$\frac{N_f}{N_i} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

folgt also für den Bruchteil der Zerfallenen Kaonen und Pionen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{N_f}{N_i}\right)_{K^+} &= 0.064276 \\ \left(\frac{N_f}{N_i}\right)_{\pi^+} &= 0.008896\end{aligned}$$

D.h. es zerfallen nur ca. 6.4 % der Kaonen und gerade einmal ca. 0.8 % der Pionen auf der Strecke von 100 m, eine längere Strecke könnte die Ausbeute an Neutrinos also noch deutlich erhöhen.

b)

Es sind die mini- und maximale Neutrinoenergie für beide Zerfälle zu bestimmen. Wir betrachten hierzu:

$$p_{K^+,\pi^+} = p_{\mu^+} + p_{\nu_\mu}$$

Umstellen liefert:

$$p_{\mu^+} = p_{K^+,\pi^+} - p_{\nu_\mu}$$

dies benötigen wir, damit der Winkel θ zwischen p_{K^+,π^+} und p_{ν_μ} liegt. Wieder einmal der gleiche Ansatz über quadrieren:

$$p_{\mu^+} \cdot p_{\mu^+} = p_{K^+,\pi^+} \cdot p_{K^+,\pi^+} + p_{\nu_\mu} \cdot p_{\nu_\mu} - 2p_{K^+,\pi^+} \cdot p_{\nu_\mu}$$

Und den sonstigen Umformungen, erhalten wir:

$$\left(m_{\mu^+}^2 - m_{K^+,\pi^+}^2\right) c^2 = m_{\nu_\mu}^2 c^2 - 2\left(\frac{E_{K^+,\pi^+} E_{\nu_\mu}}{c^2} - \vec{p}_{K^+,\pi^+} \cdot \vec{p}_{\nu_\mu}\right)$$

Wir können die Voraussetzung nutzen, dass die Ruhemasse des Neutrinos 0 sei. Ausführen des Skalarproduktes führt uns zu:

$$\frac{1}{2}\left(m_{K^+,\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2\right) c^2 = \frac{E_{K^+,\pi^+} E_{\nu_\mu}}{c^2} - \left|\vec{p}_{K^+,\pi^+}\right| \left|\vec{p}_{\nu_\mu}\right| \cos\theta$$

Für die Beträge der Impulse mit Hilfe der Energie-Impuls-Beziehung der SRT erhalten wir:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \Leftrightarrow |\vec{p}| = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2 c^4}$$

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}_{\nu_\mu}\right| &= \frac{E_{\nu_\mu}}{c} \\ \left|\vec{p}_{K^+,\pi^+}\right| &= \frac{1}{c}\sqrt{E_{K^+,\pi^+}^2 - m_{K^+,\pi^+}^2 c^4}\end{aligned}$$

Wir können einsetzen und nach E_{ν_μ} umstellen:

$$E_{\nu_\mu} = \frac{\left(m_{K^+,\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2\right) c^4}{2\left(E_{K^+,\pi^+} - \sqrt{E_{K^+,\pi^+}^2 - m_{K^+,\pi^+}^2 c^4}\cos\theta\right)}$$

Die Bestimmung der mini- und maximalen Energie erfolgt indem wir $\theta = 180°$ bzw. $\theta = 0°$ einsetzen, wobei der Wert minimal für 180° und maximal für 0° wird. Es ergeben sich mit $m_{\mu^+} = 0.105658369\,\mathrm{GeV}/c^2$, $m_{K^+} = 0.493677\,\mathrm{GeV}/c^2$, $m_{\pi^+} = 0.13957018\,\mathrm{GeV}/c^2$ und $E_{K^+,\pi^+} = 200\,\mathrm{GeV}$ die mini- und maximalen Energien von:

$$\begin{aligned}
E_{\nu_\mu,\min}\left(\pi^+\right) &= 0.010\,\mathrm{MeV}\\
E_{\nu_\mu,\max}\left(\pi^+\right) &= 85.38\,\mathrm{GeV}\\
E_{\nu_\mu,\min}\left(K^+\right) &= 0.291\,\mathrm{MeV}\\
E_{\nu_\mu,\max}\left(K^+\right) &= 190.84\,\mathrm{GeV}
\end{aligned}$$

Rechnung siehe *mathematica*.