

Atom- und Molekülphysik SoSe 2007 (Prof. Heyne)

Übung Nr. 4:

Abgabe bei Dr. Stefan Weber, webers@physik.fu-berlin.de, vor Freitag 18 Mai, 12.00 h.

1) A, B und C sind Operatoren. Zeigen die dass: (3)

a) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

b) $[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A$

c) Verwenden Sie b) um zu beweisen, dass $[L^2, L_z] = 0$

d) $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$

2) Für den Harmonische Oszillator zeigten wir, dass (5)

$$a^+ a \Psi_n = -2n \Psi_n \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Zeigen Sie dass für quadratintegrierbare Ψ und φ gilt:

$$\int (a^+ \varphi)^* \psi dy = - \int \varphi^* a \psi dy$$

Hinweis: partiell integrieren.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) dass

$$\int (a^+ \psi_n)^* (a^+ \psi_n) dy = 2(n+1) \int \psi_n^* \psi_n dy$$

c) Verwenden Sie das Ergebnis aus b) um zu zeigen, dass wenn Ψ_n normiert ist,

$$\Psi_{n+1} = (2)^{-1/2} (n+1)^{-1/2} a^+ \Psi_n$$

Ebenfalls normiert ist.

Es gilt also

$$a^+ \Psi_n = (2)^{1/2} (n+1)^{1/2} \Psi_{n+1}$$

Zeigen Sie analog, dass

$$a \Psi_n = (2)^{1/2} (n)^{1/2} \Psi_{n-1}$$

d) Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von $\Psi_n \rightarrow \Psi_m$ ist proportional zum Quadrat des Matrixelementes:

$$\int \Psi_m^* x \Psi_n dy = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \int \Psi_m^* y \Psi_n dy = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \int \Psi_m^* \left(\frac{a - a^+}{2} \right) \Psi_n dy$$

Verwenden Sie die Ergebnisse aus c) um zu zeigen, dass die Übergangswahrscheinlichkeit Null ist, außer wenn $m=n\pm 1$ (Auswahlregel), und dass dann gilt:

$$\left| \int \Psi_{n+1}^* x \Psi_n dy \right|^2 = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right) \frac{(n+1)}{2}$$

$$\left| \int \Psi_{n-1}^* x \Psi_n dy \right|^2 = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right) \frac{n}{2}$$

- 3) Energy is required to compress a box when a particle is inside. This suggests that the particle exerts a force on the walls.
- a) On the basis that the energy changes by $dE = -FdL$ when the length of the box changes by dL , find an expression for the force F , for an electron in a 1-dimensional box.
- b) At what length L becomes the force $F = 1$ N, if the electron is in the state $n=1$? (2)