Heiko Dumlich 25. April '07

1 Übungsblatt Atom- und Molekülphysik

1.1

Maxwellgleichungen:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \;;\; \nabla\cdot\vec{B} = 0 ;\; \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} ;\; \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

a) nichtleitend: $\rho = 0$; $\vec{j} = 0$; d.h. ungeladen und kein Stromfluss

Lineares Medium: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$;
$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$

$\Rightarrow$ Maxwellgleichungen in nichtleitend, linearem Medium:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 ;\; \nabla\cdot\vec{B} = 0 ;\; \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} ;\; \nabla\times\frac{1}{\mu}\vec{B} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Es gilt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$. Betrachte rot von der 3. und 4. Gl.:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mu\varepsilon\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\nabla\times\vec{B}}_{=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\frac{1}{\mu}\vec{B}) = \frac{1}{\mu}\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{=0}) - \frac{1}{\mu}\Delta\vec{B} = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}})$$

$\Rightarrow$ mit $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$, Lichtgeschwindigkeit im Medium:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0. \square$$

b) nichtleitend: $\rho = 0$; $\vec{j} = 0$

nicht linear: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$; $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

$\Rightarrow$ Maxwellgleichungen hierfür:

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\underbrace{\nabla\cdot\vec{P}}_{=0}) = 0 ;\; \nabla\cdot\vec{B} = 0 ;\; \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} ;\; \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B}) - \nabla\times\vec{M} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}_{(1)}$$

Wie in Aufgabenteil a) betrachten wir die Rotationen der letzten beiden Gl.:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} - \mu_0\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\nabla\times\vec{B}}_{\text{aus }(1)})$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{=0}) - \frac{1}{\mu_0}\Delta\vec{B} = -\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + \left(\nabla\times\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) + \nabla\times(\nabla\times\vec{M}) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}) + \left(\nabla\times\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) + \nabla\times(\nabla\times\vec{M})$$

mit $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$ folgt:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} + \mu_0\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) - \mu_0\nabla\times(\nabla\times\vec{M}).$$

1.2

a) z.z.: Emissivität $\varepsilon = 1$ für Schwarzen Strahler im thermischen GG.

Aus der Vorlesung können wir die Formel:

$$R = \varepsilon \sigma T^4,$$

benutzen, wobei R die totale Emission darstellt. Um diese für einen schwarzen Körper zu bestimmen, können wir die Planck'sche Strahlungsformel über alle Frequenzen integrieren und danach noch weiter umformen, um die Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsformel für den Schwarzkörper zu erhalten. Dies erreichen wir, indem wir über den Raumwinkel die Strahlungsdichte ($S = \frac{c\rho}{4\pi}\cos\theta$), die die von dem Oberflächenelement $dA = 1\,m^2$ in dem Raumwinkel $d\Omega = 1\,sr$ emittierte Strahlung beschreibt, integrieren.

$$\Rightarrow \rho = \int_0^\infty d\nu \underbrace{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\right]}_{\rho(\nu)} \overset{x = \frac{h\nu}{kT},\ d\nu = \frac{kT}{h}dx}{=} \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \cdot \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\text{Bronstein/mathematica} = \frac{\pi^4}{15}}$$

$$\rho = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3}.$$

Wir integrieren $S = \frac{\cancel{c}}{\cancel{4\pi}} \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15 c^3 h^3} \cdot \cos\theta$ über den Raumwinkel Ω, wobei wir nur den Halbraum betrachten und erhalten:

$$\underset{\text{blackbody}}{R_{bb}} = \int d\Omega \frac{\sigma}{\pi} T^4 \cos\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta\cos\theta}_{=\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{\pi} T^4 = 1 \cdot \sigma T^4.$$

Für den Schwarzkörper folgt also $\varepsilon = 1$ durch Vergleich mit der totalen Emission.

b) z.z.: $f(\lambda T) = 8\pi k_B \lambda T$ aus $\rho(\lambda) = \lambda^{-5} f(\lambda T)$ und Rayleigh-Jeans

Wir betrachten Rayleigh-Jeans: $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$. Wir wollen RJ in Abhängigkeit von λ, wobei $\lambda\nu = c$, bzw. $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Wir betrachten ρ_{tot}:

$$\rho_{tot} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, \rho(\nu) \underset{\lambda = \frac{c}{\nu}}{=} \int_{\frac{c}{\nu_1}}^{\frac{c}{\nu_2}} d\lambda \left(-\frac{\nu^2}{c}\right) \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \underset{\substack{\nu = \frac{c}{\lambda} \\ \text{(Grenzen drehen mit „−")}}}{=} \int_{\frac{c}{\nu_2}}^{\frac{c}{\nu_1}} d\lambda \frac{\cancel{c}}{\lambda^2} \frac{8\pi}{\lambda^2 \cancel{c}} k_B T = \int_{\frac{c}{\nu_2}}^{\frac{c}{\nu_1}} d\lambda\, \rho(\lambda).$$

$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$, $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$\Rightarrow$ RJ: $\rho(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$, Gleichsetzen mit Wien $\rho(\lambda) = \lambda^{-5} f(\lambda T)$ liefert die gesuchte Relation für $f(\lambda T)$:

$$\frac{8\pi}{\cancel{\lambda^4}} k_B T \cdot \lambda^{\cancel{5}} = f(\lambda T) = 8\pi k_B \lambda T. \quad \square$$

1.3

Schwarze Strahler sind definiert mit $A=1$ (Absorption), d.h. alle eingehende Strahlung wird absorbiert und dem „Energiereservoir" des Strahlers hinzugefügt. Dieser emittiert dann nach Planck'schem Strahlungsgesetz, wobei dieses von der Geometrie unabhängig ist. Da er wegen $A=1$ zu keiner Reflexion kommt ist auch sicher-gestellt, dass nur Strahlung von dem Schwarzen Strahler abgestrahlt wird, die Planck's law gehorcht.

1.4

Wir betrachten das Verhältnis von spontaner zu stimulierter Emission für $T=300K$ und für verschiedene Wellenlängen. Es gilt $\frac{c}{\lambda}=\nu$ und für das Verhältnis R:

$$R=\frac{A_{21}}{B_{21}\,\rho(\nu)}=e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1=e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\,.$$

Wir können die Werte mit mathematica durch einsetzen berechnen:

$$R_{1\text{Å}=10^{-10}\text{m}}=1{,}96\cdot 10^{208324}$$

$$R_{500\text{nm}=5\cdot10^{-7}\text{m}}=5{,}07\cdot 10^{41}$$

$$R_{5\mu\text{m}=5\cdot10^{-6}\text{m}}=14806{,}6$$

$$R_{10\text{mm}=10^{-2}\text{m}}=0{,}0048=4{,}81\cdot 10^{-3}$$

1.5

z: $\rho(\nu)=\frac{8\pi\nu^2n^2n_g}{c_0^3}$, für $n_g=n+\nu\frac{dn}{d\nu}$.

Definition Modendichte: $\rho(\nu)=\frac{1}{V}\frac{dN_\nu(\nu)}{d\nu}$, in unserem Fall ist $N_\nu(\nu)$ mit einem Frequenzabhängigen Brechungsindex $n(\nu)$ aufzustellen ($n\neq\text{const.}=1$)

$c=\frac{c_0}{n(\nu)}$

$\Rightarrow\quad N_\nu(\nu)=\frac{8\pi\nu^3n^3(\nu)V}{3c_0^3}$, in $\rho(\nu)$ eingesetzt liefert das:

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi}{3c_0^3}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^3n(\nu)^3\right),$$

mit Produktregel liefert das:

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi}{3c_0^3}\left(3\nu^2n(\nu)^3+3n'n(\nu)^2\nu^3\right)$$

$$=\frac{8\pi n^2\nu^2}{c_0^3}\left(n(\nu)+n'\nu\right),$$

mit $n(\nu)+\nu\frac{dn}{d\nu}=n_g$ folgt:

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi\nu^2n^2n_g}{c_0^3}\,.\ \square$$