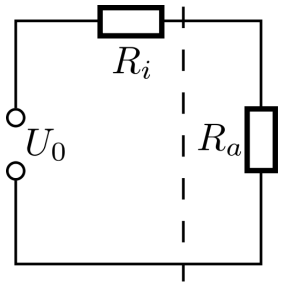
Übung 5 - Musterlösung

Aufgabe 12: Galvanisches Element

Galvanisches Element: Spannung $U_0 = 2V$ und Innenwiderstand $R_i = 0.5\,\Omega$ im unbelasteten Zustand

Variabler äußerer Widerstand $0\,\Omega < R_a < 4\,\Omega$

Schaltbild:



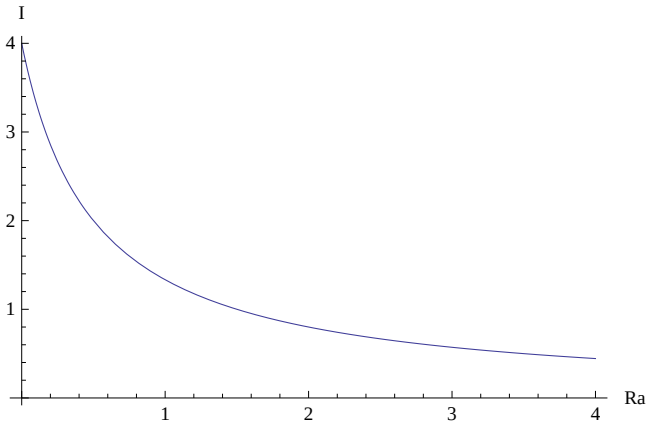
Gesucht: graphische Darstellung in Abhängigkeit von R_a:

a)

Es gilt

$$U_0 = (R_a + R_i) \cdot I \Rightarrow I = \frac{U_0}{(R_a + R_i)},$$

dies führt auf die Darstellung der Stromstärke des Stromkreises:

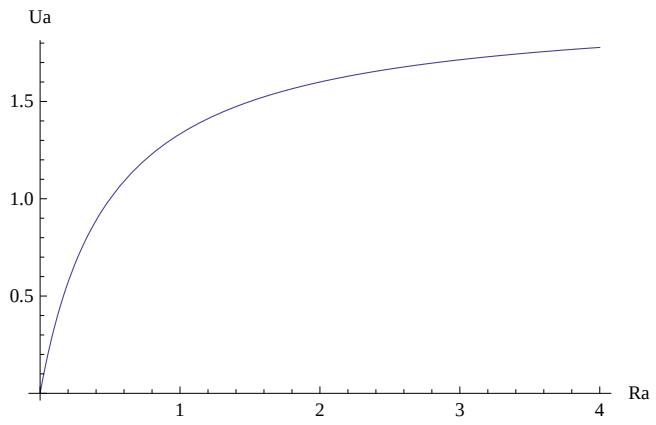


b)

Der Potentialunterschied zwischen den Klemmen des äußeren Kreises entspricht die äußere Spannung $U_a = \phi_{a2} - \phi_{a1} = R_a \cdot I$, hier können wir das in **a)** bestimmte I einsetzen und erhalten:

$$U_a = R_a \cdot I = \frac{U_0 \cdot R_a}{(R_a + R_i)},$$

welches auf die Darstellung der Potentialunterschiede an den Klemmen des äußeren Kreises führt:

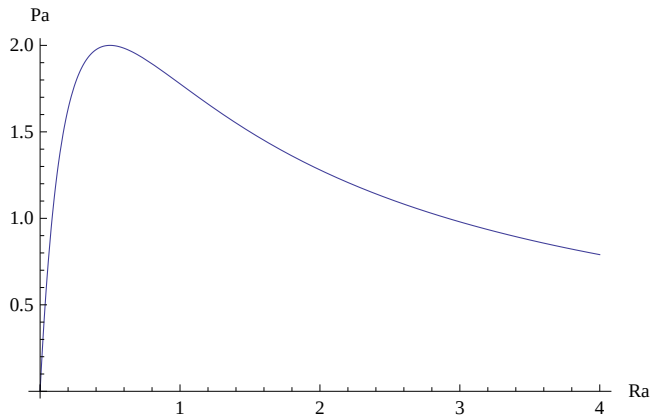


c)

Für die abgegebene Leistung an den äußeren Kreis gilt $P_a = U_a \cdot I$, einsetzen von I aus **a)** und U_a aus **b)** liefert:

$$P_a = U_a \cdot I = \frac{U_0^2 \cdot R_a}{(R_a + R_i)^2},$$

welches auf die Darstellung der abgegebenen Leistung an den äußeren Kreis führt:



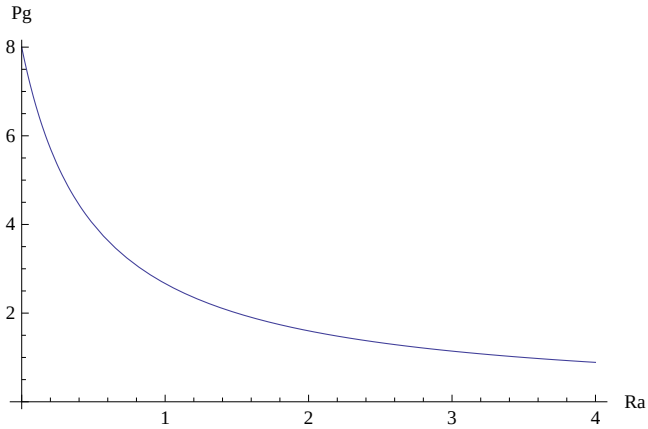
Die Leistung wird für $R_a = R_i$ maximal.

d)

Die Gesamtleistung lässt sich als $P_g = U_0 \cdot I$ berechnen, einsetzen von I aus **a)** liefert:

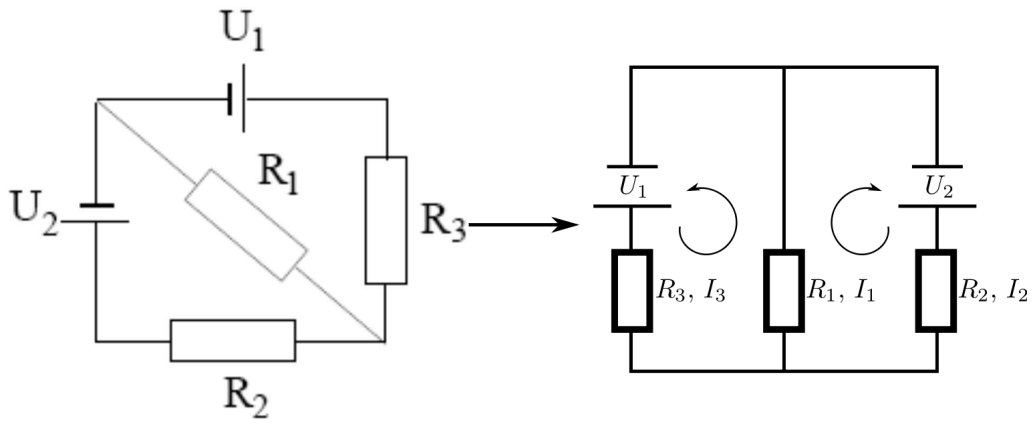
$$P_g = \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)},$$

welches auf die Darstellung der Gesamtleistung führt:



Aufgabe 13:

Es sind die Stromstärken für alle Zweige der abgebildeten Schaltung gesucht, hierfür schreiben wir das Schaltbild um, damit wir die Schaltung besser auslesen können:



Die Schaltung hat folgende Eigenschaften:

$U_1 = 2.1\,\mathrm{V}$, $R_{i1} \approx 0\,\Omega$

$U_2 = 1.9\,\mathrm{V}$, $R_{i2} \approx 0\,\Omega$

$R_1 = 45\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$ und $R_3 = 10\,\Omega$

Unter der Ausnutzung der Kirchhoffschen Gesetze $U = \sum_i U_i$ und $I = \sum_i I_i$ ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen, die wir aus dem Schaltbild ablesen können:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_3 \cdot I_3 + R_1 \cdot I_1 \\ U_2 &= R_2 \cdot I_2 + R_1 \cdot I_1 \\ I_1 &= I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir lösen, um die Stromstärken I_i $(i = 1, 2, 3)$ zu bestimmen. Wir setzen $I_1 = I_2 + I_3$ in die ersten beiden Gleichungen ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= (R_3 + R_1) \cdot I_3 + R_1 \cdot I_2 \\
U_2 &= (R_2 + R_1) \cdot I_2 + R_1 \cdot I_3.
\end{aligned}
$$

Umstellen nach I_2 liefert:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{U_1}{R_1} - \frac{(R_3 + R_1) \cdot I_3}{R_1} \\
I_2 &= \frac{U_2}{(R_2 + R_1)} - \frac{R_1 \cdot I_3}{(R_2 + R_1)}.
\end{aligned}
$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert uns eine Bestimmungsgleichung für I_3:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_1}{R_1} - \frac{(R_3 + R_1) \cdot I_3}{R_1} &= \frac{U_2}{(R_2 + R_1)} - \frac{R_1 \cdot I_3}{(R_2 + R_1)} \\
\frac{R_1^2 - (R_2 + R_1)(R_3 + R_1)}{(R_2 + R_1) R_1} \cdot I_3 &= \frac{U_2}{(R_2 + R_1)} - \frac{U_1}{R_1} \\
I_3 &= \frac{R_1 U_2 - (R_2 + R_1) U_1}{R_1^2 - (R_2 + R_1)(R_3 + R_1)} \\
I_3 &= \frac{(R_2 + R_1) U_1 - R_1 U_2}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3}.
\end{aligned}
$$

Dies können wir nun in die Bestimmungsgleichung für $I_2\,(I_3)$ einsetzen und erhalten für I_2:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{U_1}{R_1} - \frac{(R_3 + R_1)}{R_1} \cdot \frac{(R_2 + R_1) U_1 - R_1 U_2}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3} \\
I_2 &= \frac{(R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3) U_1 - (R_3 + R_1) \cdot [(R_2 + R_1) U_1 - R_1 U_2]}{(R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3) R_1} \\
I_2 &= \frac{(R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3) U_1 - (R_3 R_2 + R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_1^2) U_1 + (R_3 + R_1) R_1 U_2}{(R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3) R_1} \\
I_2 &= \frac{(R_3 + R_1) U_2 - R_1 U_1}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3}.
\end{aligned}
$$

Um nun noch I_1 zu bestimmen können wir I_2 und I_3 einsetzen:

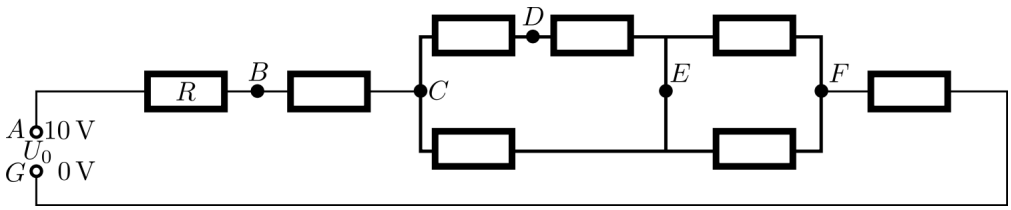
$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_2 + I_3. \\
I_1 &= \frac{(R_3 + R_1) U_2 - R_1 U_1 + (R_2 + R_1) U_1 - R_1 U_2}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3} \\
I_1 &= \frac{R_2 U_1 + R_3 U_2}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3}.
\end{aligned}
$$

Wir können jetzt noch die angegebenen Werte für die Spannungen und Widerstände einsetzen und erhalten die Stromstärken in allen Zweigen der Schaltung:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 0.04\,\mathrm{A} \\
I_2 &= 0.01\,\mathrm{A} \\
I_3 &= 0.03\,\mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 14:

Wir betrachten die gegebene Schaltung, die wir vereinfachen können:



a)

Wir können den Gesamtwiderstand zwischen zwei Punkten berechnen indem wir die Parallel- $\left(\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}\right)$ und Serienwiderstände $\left(R = \sum_j R_j\right)$ betrachten. Es gilt somit:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \left(\frac{1}{\sum_j R_{ij}}\right) \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{1}{\sum_j R_{ij}}\right)}.$$

Für den Widerstand zwischen den Punkten C und E haben wir einen Widerstand, der zu zwei Widerständen parallel ist. Daher gilt:

$$R_{CE} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{3}{2R}} = \frac{2}{3}R.$$

Der Widerstand zwischen den Punkten E und F hat einen Widerstand, der zu einem anderen Widerstand parallel ist:

$$R_{EF} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{2}{R}} = \frac{1}{2}R.$$

b)

Um den Strom zwischen A und G zu berechnen, müssen wir zuerst den Gesamtwiderstand der Schaltung bestimmen. Wir können unsere Ergebnisse aus **a)** verwenden, denn es gilt für den Gesamtwiderstand:

$$R_{AG} = R_{AC} + R_{CE} + R_{EF} + R_{FG},$$

wobei $R_{AC} = 2R$, da zwei Widerstände in Serie geschaltet sind und $R_{FG} = R$. Einsetzen liefert

$$R_{AG} = 2R + \frac{2}{3}R + \frac{1}{2}R + R = \frac{25}{6}R.$$

Wir können jetzt $U_0 = R_{AG} \cdot I$ nach I umstellen und erhalten:

$$I = \frac{U_0}{R_{AG}} = \frac{6U_0}{25R}.$$

Einsetzen von U_0 und $R = 1\,\mathrm{k\Omega} = 10^3\,\Omega$ liefert:

$$I = 2.4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}.$$

c)

Weg 1:

Wir berechnen den betragsmäßigen Spannungsunterschied zwischen B und C mit $R_{BC} = R$, wobei wir die bekannten Werte für die gesamte Schaltung mit dem Abfall zwischen B und C vergleichen:

$$\frac{U_0}{R_{AG}} = \frac{\Delta U}{R_{BC}} \Leftrightarrow \Delta U = \frac{R}{R_{AG}} U_0 = \frac{R}{\frac{25}{6}R} U_0 = \frac{6}{25} U_0 = 2.4\,\mathrm{V}.$$

Der Spannungsabfall beträgt $2.4\,\mathrm{V}$, d.h. die Spannung ändert sich um $-2.4\,\mathrm{V}$.

Weg 2:

Als alternativen Weg können wir auch die Spannung zwischen A und B und die Spannung zwischen A und C berechnen und dann den Spannungsunterschied zwischen diesen beiden Spannungen berechnen. Hierfür bestimmen wir die Widerstände, die bis zu dem jeweiligen Punkt auftreten. Es folgt $R_{AB} = R$ und $R_{AC} = 2R$. Dies liefert dann für den Spannungsunterschied

$$\Delta U_{BC} = U_{AB} - U_{AC} = (R_{AB} \cdot I - R_{AC} \cdot I) = (R - 2R) \cdot I = -R \cdot I = -10^3\,\Omega \cdot 2.4 \cdot 10^{-3}\,A = -2.4\,V.$$

Der Spannungsabfall zwischen Punkt B und C beträgt also $2.4\,V$.

d)

Wir wollen das Potential am Punkt E berechnen. Hierfür müssen wir den Spannungsabfall an den Punkten zwischen A bis E bestimmen. Für den Abfall an einem Widerstand R haben wir bereits den Spannungsabfall mit $\Delta U_{BC} = -2.4\,\mathrm{V}$ berechnen. Dies gilt zudem für den Abfall zwischen A und B, d.h. $\Delta U_{AB} = -2.4V$. Daher müssen wir nun noch den Spannungsabfall zwischen C und E bestimmen.

Weg 1:

Analog zu **c)** finden wir ΔU_{CE}

$$\frac{U_0}{R_{AG}} = \frac{\Delta U_{CE}}{R_{CE}} \Leftrightarrow \Delta U = \frac{R_{CE}}{R_{AG}} U_0 = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{25}{6}R} U_0 = \frac{4}{25} U_0 = 1.6\,\mathrm{V}.$$

Der Spannungsabfall beträgt 1.6 V, d.h. die Spannung ändert sich also um $-1.6\,\mathrm{V}$.

Weg 2:

Analog zu **c)** *berechnen wir den alternativen Weg. Es folgt* $R_{AC} = 2R$ *und* $R_{AE} = R_{AC} + R_{CE} = 2R + \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}R$. *Dies liefert dann für den Spannungsunterschied*

$$\Delta U_{CE} = U_{AC} - U_{AE} = (R_{AC} \cdot I - R_{AE} \cdot I) = \left(2R - \frac{8}{3}R\right) \cdot I = -\frac{2}{3}R \cdot I = -\frac{2}{3} \cdot 10^3\,\Omega \cdot \frac{24}{10} \cdot 10^{-3}\,A = -1.6\ V.$$

Der Spannungsabfall beträgt also 1.6 *V.*

Potential am Punkt E:

Das Potential am Punkt E ergibt sich nun aus:

$$\phi\,(E) = U_0 - \Delta U_{AE},$$

mit $U_{AE} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CE} = -2.4\,\mathrm{V} - 2.4\,\mathrm{V} - 1.6\,\mathrm{V} = -6.4\,\mathrm{V}$ und $U_0 = 10\,\mathrm{V}$ führt dies auf:

$$\phi\,(E) = 3.6\,\mathrm{V}.$$

Als kleines extra hier die Potentiale an den verschiedenen Punkten der Schaltung:

$$\begin{aligned}
\phi\,(A) &= 10\ V \\
\phi\,(B) &= 10\ V - 2.4\ V = 7.6\ V \\
\phi\,(C) &= 7.6\ V - 2.4\ V = 5.2\ V \\
\phi\,(D) &= 5.2\ V - 0.8\ V = 4.4\ V \\
\phi\,(E) &= 5.2\ V - 1.6\ V = 3.6\ V \\
\phi\,(F) &= 3.6\ V - 1.2\ V = 2.4\ V \\
\phi\,(G) &= 2.4\ V - 2.4\ V = 0\ V.
\end{aligned}$$