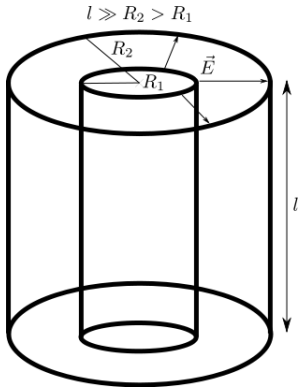
Übung 4 - Musterlösung

Aufgabe 9: Zylinderkondensator/Koaxialkabel

Wir betrachten zwei gerade, konzentrische Hohlleiter der Länge l und mit den Radien R_1 und R_2, wobei $R_1 < R_2 \ll l$. Auf dem inneren Zylinder befinde sich eine Ladung $+Q$ und auf dem äußeren Zylinder eine Ladung $-Q$:



a)

Wir wählen die Zylindersymmetrie, da das Feld auch zylindersymmetrisch ist und die geeignete geschlossene Fläche somit ein konzentrisch angeordneter Zylinder mit dem Radius r und der Länge l' ist, wobei das Feld auf allen Stellen des Mantels gleich groß ist.

Wir können nun die folgenden drei Fälle Unterscheiden: $r < R_1$ (Innen), $R_1 < r < R_2$ (zwischen den Leitern) und $R_2 < r$ (Aussen).

Für Innen ergibt sich, da dort keine Ladung $Q_i = 0$ existiert:

$$\int \vec{E}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}.$$

Zwischen den Leitern

$$\begin{aligned} \int \vec{E}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \left|\vec{E}\right| \cdot 2\pi r l &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \left|\vec{E}\right| &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}, \end{aligned}$$

wobei dies der Betrag des elektrischen Feldes ist. Die Richtung ist $\vec{e}_r$ radial vom Mittelpunkt des Koaxialkabels nach aussen (siehe Skizze). Somit ergibt sich für das elektrische Feld zwischen den Hohlzylindern:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\vec{e}_r.$$

Für Aussen ergibt sich, da dort keine Ladung $Q_a = 0$ existiert (die Ladungen der Hohlleiter heben sich genau auf $+Q - Q = 0$):

$$\int \vec{E}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{A} = \frac{+Q - Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}.$$

b)

Es gilt $-\nabla\varphi = \vec{E}$. Somit können wir aus dem in **a)** berechneten elektrischen Feld $\vec{E}$ das Potential berechnen. Es gilt:

$$\varphi\left(r'\right) = -\int_0^{r'} E\left(r\right)\, dr.$$

Für Innen ergibt sich mit $\vec{E} = \vec{0}$:

$$\varphi\left(r'\right) = \text{const.} = 0,$$

da wir $\varphi\left(0\right) = 0$ vorausgesetzt haben.

Zwischen den Leitern erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi\left(r'\right) &= -\int_0^{r'} E\left(r\right)\, dr \\
&= -\int_0^{R_1} E\left(r\right)\, dr - \int_{R_1}^{r'} E\left(r\right)\, dr \\
&= 0 - \int_{R_1}^{r'} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\, dr \\
&= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{R_1}^{r'} \frac{1}{r}\, dr \\
&= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\ln r\right]_{R_1}^{r'} \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_1}{r'}.
\end{aligned}$$

Für Aussen ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(r'\right) &= -\int_0^{r'} E\left(r\right)\, dr \\
&= -\int_0^{R_1} E\left(r\right)\, dr - \int_{R_1}^{R_2} E\left(r\right)\, dr - \int_{R_2}^{r'} E\left(r\right)\, dr \\
&= 0 - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\, dr - 0
\end{aligned}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

c)

Für die Spannung zwischen den beiden Hohlleitern gilt:

$$\begin{aligned}
|U| &= \varphi_{R_1} - \varphi_{R_2} \\
&= -\int_0^{R_1} E(r)\, dr - \left(-\int_0^{R_1} E(r)\, dr - \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr \right) \\
&= \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1},
\end{aligned}$$

hieraus folgt mit $C = \frac{Q}{U}$ für die Kapazität:

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{|U|} &= 2\pi\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \\
C &= \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.
\end{aligned}$$

d)

Wir können die in **c)** hergeleitete Formel für die Kapazität benutzen und die Werte $l = 1\,\mathrm{m}$, $R_1 =$ m und $R_2 =$ m einsetzen und erhalten:

$$C = 3.45657 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}.$$

Aufgabe 10: Dielektrikum im Feld

Wir betrachten das elektrische Feld

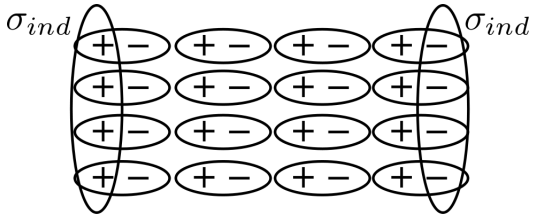
$$\vec{E}_{vac} = \begin{pmatrix} 200\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{pmatrix},$$

in dem eine senkrecht zu den elektrischen Feldlinien orientierte isotrope (ε ist ein Skalar) Isolatorplatte steht. Innerhalb der Platte herrscht ein elektrisches Feld

$$\vec{E}_{Diel} = \begin{pmatrix} 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{pmatrix}.$$

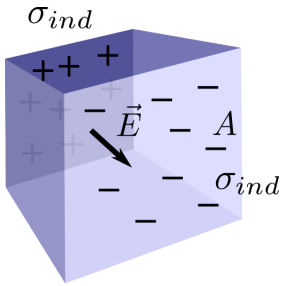
a)

Die Polarisation richtet die Ladungen innerhalb der Isolatorplatte aus (*Elektronenaufenthaltswahrscheinlichkeiten werden relativ zu den Ionenrümpfen verschoben*) und induziert hiermit eine Flächenladungsdichte σ_{ind}, da die an den Rändern ausgerichteten Moleküle/Atome keinen Gegenpol haben und sich somit nicht gegenseitig kompensieren.



b)

Wir können den Gausschen Satz benutzen, um mit Hilfe von $\vec{E}_{Diel}$ und $\vec{E}_{vac}$ die induzierte Flächenladungsdichte σ_{ind} zu bestimmen.



Es trägt nur die Stirnfläche A bei. Die Seitenflächen tragen nicht bei, da das elektrische Feld in Richtung der Seitenflächen verschwindet und somit keine Flächenladungsdichte auf diesen induziert wird. Nach dem Gausschen Satz gilt (mit $Q = \sigma A$):

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \\
\int \left(\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel}\right) \cdot d\vec{A} &= \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \\
\left(\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel}\right) \cdot A \cdot \vec{n} &= \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Somit ist also

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot \left(\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel}\right) \cdot \vec{n}.$$

Einsetzen der Feldstärken liefert:

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \cdot (1,0,0) = \varepsilon_0 \cdot 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 8.854 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

c)

Wir gehen aus von

$$\vec{E}_{vac} = \vec{E}_{Diel} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0},$$

es ist zu zeigen, dass $\left|\vec{P}\right| = \sigma$. Mit

$$\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0},$$

und dem Gausschen Satz:

$$\left(\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel}\right) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

folgt durch Einsetzen:

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma,$$

da $\vec{P} \parallel \vec{n}$ und $|\vec{n}| = 1$ folgt also

$$\left|\vec{P}\right| = \sigma.$$

d)

Wir können ε aus den angegebenen Feldstärken $\vec{E}_{Diel}$ und $\vec{E}_{vac}$ bestimmen. Es gilt:

$$\vec{E}_{vac} = \varepsilon \vec{E}_{Diel}.$$

Einsetzen der Feldstärken liefert 3 Bestimmungsgleichungen (für die 3 Koordinaten) für ε:

$$\begin{pmatrix} 200\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{pmatrix},$$

somit ist $\varepsilon = 2$.

e)

Wir betrachten nun den dielektrischen Tensor

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

eines anisotropen Materials.

Es sind das zugrunde liegende elektrische Feld $\vec{E}_{vac}$ sowie die Polarisation $\vec{P}$ zu berechnen für das gegebene elektrische Feld $\vec{E}_{Diel}$

$$\vec{E}_{Diel} = 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\vec{E}_{vac} = \hat{\varepsilon}\vec{E}_{Diel},$$

hieraus folgt also:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{vac} &= 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Polarisation $\vec{P}$ können wir nun mit Hilfe von

$$\vec{E}_{vac} = \vec{E}_{Diel} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \left(\vec{E}_{vac} - \vec{E}_{Diel}\right),$$

berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \varepsilon_0 \cdot 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \varepsilon_0 \cdot 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 8.854 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

f)

Es ist zu bestimmen, wie $\vec{E}_{Diel}$ orientiert ist, wenn $\vec{E}_{vac}$ parallel zu einer der ausgezeichneten Achsen des Dielektrikums ist. Es gilt

$$\vec{E}_{vac} = \hat{\varepsilon}\vec{E}_{Diel},$$

was nach umstellen

$$\vec{E}_{Diel} = \hat{\varepsilon}^{-1}\vec{E}_{vac},$$

liefert. Somit ergibt sich:

$$\vec{E}_{Diel} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{E}_{vac},$$

$\vec{E}_{Diel}$ ist also ebenfalls parallel zu einer der ausgezeichneten Richtungen.

Aufgabe 11: Bedeutung der Wirbelfreiheit

Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes lässt sich durch $\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ausdrücken. Die in **a)** folgenden Aussagen und Formeln in **b)** gelten bei Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes.

a)

1. Das Vektorfeld kann als negativer Gradient eines Skalarpotentials ausgedrückt werden.

2. Das Vektorfeld ist konservativ. Oder: Das Arbeitsintegral von P_1 nach P_2 ist unabhängig vom Weg zwischen P_1 und P_2 und durch die Potentialdifferenz der beiden Punkte gegeben.

3. Das Integral des Feldes über einen geschlossenen Weg ist immer gleich 0.

b)

1.
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

2.
$$\frac{W}{q} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi\left(P_2\right) - \phi\left(P_1\right).$$

3.
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$