Übung 3 - Musterlösung

Aufgabe 6: Wann funkt es ?

Eigene Koordinaten $\vec{r} = (-2\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m})$.

Hohlkugel: Koordinaten $\vec{r}' = (2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$, Radius $r_k = 1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$, Ladung $Q = 1\,\mu\mathrm{C} = 10^{-6}\,\mathrm{C}$.

Durchschlagsfeldstärke in Luft $\left|\vec{E}_{Blitz}\right| = 3000\,\mathrm{V/mm} = 3 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m}$.

a)

Spannung $U = \phi_k - \phi_0$, mit $\phi_k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_k}$ dem Potential der Hohlkugel und $\phi_0 = 0$ dem Potential von mir (Annahme: Ich bin geerdet und nicht statisch geladen). Einsetzen in U liefert:

$$U = \phi_k - \phi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_k} - 0 = 8.98774 \cdot 10^5\,\mathrm{V} = 898.774\,\mathrm{kV}.$$

Elektrisches Feld bei mir $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\vec{e}_r = \left|\vec{E}\right| \cdot \vec{e}_r$, mit $\vec{r} - \vec{r}' = (-4\,\mathrm{m}, -3\,\mathrm{m})$ und $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')_x^2 + (\vec{r} - \vec{r}')_y^2} = \sqrt{16\,\mathrm{m}^2 + 9\,\mathrm{m}^2} = 5\,\mathrm{m}$. Einsetzen in $\vec{E}$ liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= 8.98774 \cdot 10^3\,\mathrm{Vm} \cdot \frac{1}{5^2\,\mathrm{m}^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4\,\mathrm{m} \\ -3\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5\,\mathrm{m}}}_{\vec{e}_r} \\
&= 359.510 \cdot \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
&= \begin{pmatrix} -287.608 \\ -215.706 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

Der Betrag des elektrischen Feldes ist also $\left|\vec{E}\right| = 359.510\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

b)

Um die Entfernung zu bestimmen, ab dem ein Blitz auftreten kann, ist die Durchschlagsfeldstärke $\left|\vec{E}_{Blitz}\right| = 3 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m}$ entscheidend. Die Hohlkugel hat ein Potential von $\phi_k = 8.98774 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$ und wir benötigen die Entfernung, an dem die Spannung auf $3 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$ angestiegen ist. D.h.

$$\frac{8.98774 \cdot 10^5\,\mathrm{V}}{x\ [\text{in m}]} = \frac{3 \cdot 10^6\,\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \Rightarrow x = \frac{8.98774 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^6}\,\mathrm{m} = 0.29959\,\mathrm{m} = 0.3\,\mathrm{m}.$$

Wir erhalten eine Entfernung von $0.29959\,\mathrm{m}$ ab der ein Blitz auftreten kann, wobei wir für die einfachere Berechnung der Koordinaten $0.3\,\mathrm{m}$ annehmen. Da wir uns über den direkten Weg nähern wollen, müssen wir den Einheitsvektor $\vec{e}_r$ betrachten, den wir in **a)** berechnet haben als $\vec{e}_r = \frac{1}{5} \cdot (-4, -3)$. Hieraus ergeben sich meine neuen Koordinaten aus

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{Blitz} &= \vec{r}' + x \cdot \vec{e}_r \\
&= \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} + 0.3\,\mathrm{m} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.76 \\ 0.82 \end{pmatrix} \mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

c)

Die Energie ist $W = \frac{1}{2}CU^2$. Die Spannung haben wir in **a)** mit $U = 8.98774 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$ berechnet. Wir benötigen noch die Kapazität der Hohlkugel $C_k = 4\pi\varepsilon_0 r_k = 1.113 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$, um die Energie zu bestimmen. Diese ergibt sich somit zu:

$$
W = \frac{1}{2}C_k U^2 = 0.4494\,\mathrm{J}.
$$

d)

Um das Dipolfeld berechnen zu können, benötigen wir die elektrischen Felder beider Hohlkugeln. Das elektrische Feld der ersten Hohlkugel $\vec{E}_1$ (am Ort $\vec{r}_1' = (2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$) haben wir in **a)** berechnet. Das elektrische Feld der zweiten geladenen Hohlkugel (am Punkt $\vec{r}_2' = (1.3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$) bei mir am Ort $\vec{r} = (-2\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m})$ erhalten wir äquivalent zu der Rechnung in **a)**. Elektrisches Feld bei mir $\vec{E}_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_2'\right|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_2'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2'\right|} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}_2'\right|^2} \vec{e}_r = -\left|\vec{E}\right| \cdot \vec{e}_r$, mit $\vec{r} - \vec{r}_2' = (-3.3\,\mathrm{m}, -3\,\mathrm{m})$ und $|\vec{r} - \vec{r}_2'| = \sqrt{(3.3)^2\ \mathrm{m}^2 + 9\,\mathrm{m}^2} = 4.45982\,\mathrm{m}$. Einsetzen in $\vec{E}_2$ liefert:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= -8.98774 \cdot 10^3\,\mathrm{Vm} \cdot \frac{1}{(4.45982)^2\ \mathrm{m}^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -0.73994 \\ -0.67267 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} \\
&= -451.872 \cdot \begin{pmatrix} -0.73994 \\ -0.67267 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
&= \begin{pmatrix} 334.359 \\ 303.962 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$

Der Betrag des elektrischen Feldes ist also $\left|\vec{E}\right| = 451.872\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Für das Dipolfeld bei mir am Ort $\vec{r} = (-2\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m})$ ergibt sich mit $\vec{E}_{Dipol} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$
\vec{E}_{Dipol} = \begin{pmatrix} -287.608 \\ -215.706 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} + \begin{pmatrix} 334.359 \\ 303.962 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 46.7508 \\ 88.2565 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
$$

Für den Betrag des Dipolfeldes $\left|\vec{E}_{Dipol}\right|$ folgt also:

$$
\left|\vec{E}_{Dipol}\right| = \sqrt{(46.7508)^2 + (88.2565)^2}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 99.8741\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
$$

Betrachten wir nun die Fernfeldnäherung

$$\vec{E}_{FF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}\right|^3} \left(3\left|\vec{p}\right| \cdot \cos\theta \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}\right|} - \vec{p} \right), \tag{1}$$

wobei $\vec{r} = (-2\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m})$ meine Koordinaten sind, $\vec{r}_{Dipol} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1' + \vec{r}_2'\right) = (1.65\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ der Vektor zum Mittelpunkt des Dipols ist und $\vec{p} = Q \cdot \vec{d} = 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot (0.7\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m}) = \left(7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Cm}, 0\,\mathrm{Cm}\right)$ das elektrische Dipolmoment mit $\vec{d} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2' = (0.7\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ ist. Wir müssen noch den Vektor zwischen mir und dem Mittelpunkt des Dipols und dessen Betrag berechnen

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}_{Dipol} &= (-3.65\,\mathrm{m}, -3\,\mathrm{m}) \\ \left|\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}\right| &= 4.72467\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

daraus folgt für den Einheitsvektor $\vec{e}_r = \left(\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}\right) / \left|\vec{r} - \vec{r}_{Dipol}\right| = (-0.77254, -0.63497)$. Um den Ausdruck aus Gleichung (1) auswerten zu können, müssen wir noch $\left|\vec{p}\right| \cos\theta$ berechnen:

$$\left|\vec{p}\right| \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{e}_r = -5.40779\,\mathrm{Cm}.$$

Wir können jetzt alle Terme in Gleichung (1) einsetzen und erhalten für das Dipolfeld in der Fernfeldnäherung:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{FF} &= 8.5219 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Cm}^2} \left(-1.62234 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Cm} \cdot \begin{pmatrix} -0.77254 \\ -0.63497 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Cm} \\ 0\,\mathrm{Cm} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 47.1534 \\ 87.7863 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \end{aligned}$$

Für den Betrag ergibt sich

$$\left|\vec{E}_{FF}\right| = 99.6488\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Die Abweichung zwischen Näherung und exaktem Ausdruck beträgt in diesem Fall also unter 1%, wobei die x-Komponente für den exakten Fall geringer ist als für den Fernfeld Fall, jedoch bei der y-Komponente ist dies genau umgekehrt. In Abhängigkeit der benötigten Genauigkeit kann man dann entscheiden, ob man sich bereits im Fernfeld befindet oder ob man exakt rechnen muss.

Aufgabe 7: Energiespeicher

Plattenkondensator mit Fläche $A = 4\,\mathrm{m}^2$, Plattenabstand $d = 4\,\mathrm{mm} = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ und Plexiglasplatte als Dielektrikum mit $\varepsilon = 3.4$ (füllt den Kondensator genau aus).

a)

Kapazität des Plattenkondensators $C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$ mit $\varepsilon = 1$ für den Fall ohne Dielektrikum und $\varepsilon = 3.4$ mit Dielektrikum.

Ohne Dielektrikum: $C_0 = 8.854 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 8.854 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$.

Mit Dielektrikum: $C_\varepsilon = 3.01036 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F}$.

b)

Um die gespeicherte Energie zu berechnen benutzen wir $W = \frac{1}{2}CU^2$ mit $U = 100\,\mathrm{V}$, hieraus folgt:

Aufladung mit Dielektrikum: $W_i = \frac{1}{2}C_\varepsilon U^2 = 1.505 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

Nach dem Herausziehen: $W_f = \frac{1}{2}C_0 U^2 = 4.427 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$.

Unterschied: $\Delta W = W_f - W_i = -1.062 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$, d.h. die gespeicherte Energie sinkt um den Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$.

c)

Zu Beginn hat der Kondensator die in **b)** berechnete Energie $W_i = 1.505 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$ gespeichert. Die Ladung Q auf dem Kondensator ist konstant $Q = C \cdot U = \text{const.} \Rightarrow Q = C_\varepsilon \cdot U_\varepsilon = 3.010 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F} \cdot 10^2\,\mathrm{V} = 3.010 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$, da er von der Spannungsquelle abgetrennt wurde. D.h. beim Herausziehen des Dielektrikums ändert sich die Spannung. Für den Kondensator mit herausgezogenem Dielektrikum folgt dann also für die Spannung:

$$U_0 = \frac{Q}{C_0} = 340\,\mathrm{V}.$$

Für die Energie folgt somit für den Kondensator mit herausgezogenem Dielektrikum

$$W_2 = \frac{1}{2}C_0 U_0 = 5.118 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J},$$

mit dem Unterschied $\Delta W = W_f - W_i = 3.612 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$, d.h. die gespeicherte Energie steigt um den Faktor ε.

d)

Wir haben 4 Kondensatoren und 4 Plexiglasplatten. Der gespeicherte Energiebetrag wird maximiert, wenn wir die Kondensatoren parallel schalten und die Plexiglasplatten in den Kondensatoren haben. Die Kapazität ergibt sich für die 4 parallel geschaltete Kondensatoren mit Dielektrikum (Plexiglasplatte) über

$$C_{ges} = 4 \cdot C_\varepsilon = 1.204 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F},$$

somit folgt für den gespeicherten Energiebetrag:

$$W = \frac{1}{2}C_{ges}U^2 = 6.021 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

Weiter gesteigert werden kann dies noch, wenn man die Prozedur wie in Aufgabenteil ***c)*** *durchführt und die Spannungsquelle von den Kondensatoren trennt und dann die Dielektrika aus den Kondensatoren entfernt. Dann kann ein Energiebetrag von*

$$W_{max} = \varepsilon W = 2.047 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J},$$

gespeichert werden.

Aufgabe 8: Vorsicht ! Richtig oder falsch ?

a)

Durch Reibung eines Glasstabs mit einem Katzenfell werden Ladungen getrennt und positive verbleiben auf dem Glasstab.

b)

Im elektrischen Feld ist Energie gespeichert (die in diversen Formen entnommen werden kann).

c)

√

d)

Influenz und Polarisation ist nicht dasselbe. (Influenz auf Leitern kompensiert das Feld vollständig, Polarisation in Isolatoren nur teilweise.)

e)

Immer wenn das Potenzial konstant ist, ist das elektrische Feld 0.

f)

Alle Ladungen sind Quellen oder Senken das elektrischen Feldes.

g)

√

h)

Bei gleicher Spannung enthält ein Kondensator mit großen Kapazität mehr Ladungen als einer mit kleiner Kapazität.