Übung 1 - Musterlösung

Aufgabe 1

Wir beginnen die Aufgabe mit der Auflistung der benötigten Formeln und Werte:

Coulombsches Gesetz: $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$, mit $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ und $r^2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

Netwon´sches Gesetz der Graviation: $\vec{F}_G = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

Ladung des Elektrons (Elementarladung): $q = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Masse des Elektrons: $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

Gravitationskonstante: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3kg}}{\mathrm{s^2}}$

a) Was sind die Unterschiede der beiden Gesetze ?

Coulombsches Gesetz:

- zwei verschiedene Ladungen $\Rightarrow$ anziehende und abstoßende Kraft
- Ladung ist unabhängig von Bezugssystem immer gleich/unabhängig von Geschwindigkeit, Erhaltungsgröße
- Ladung kann neutralisiert werden
- Ladung ist gequantelt (Elementarladung $q = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$)

Netwon´sches Gesetz der Graviation:

- Gravitationskraft ist immer anziehend
- Masse ist abhängig von der Geschwindigkeit des Bezugssystem, keine Erhaltungsgröße
- Gravitationskraft ist nicht kompensierbar, da nur ein Vorzeichen für Masse vorhanden
- Masse ist nicht gequantelt

b) Kräfte zwischen zwei Elektronen im Abstand von 1 nm ?

Wir berechnen die einzelnen Kräfte und bilden dann den Quotienten:

Coulombkraft: $\left|\vec{F}_C\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 2.307 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}$.

Graviationskraft: $\left|\vec{F}_G\right| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 5.534 \cdot 10^{-53}\,\mathrm{N}$.

Quotient: $\frac{\left|\vec{F}_C\right|}{\left|\vec{F}_G\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G}\frac{q_1 \cdot q_2}{m_1 \cdot m_2} = 4.168 \cdot 10^{42}$.

Hieraus erkennen wir, dass die Coulombkraft viel größer als die Gravitationskraft ist und in fast allen elektrostatischen Problemen der Einfluss der Gravitationskraft vernachlässigt werden kann.

Aufgabe 2

Es ist das elektrische Feld für fünf Ladungen (in zwei verschiedenen Anordnungen) mit jeweils $q = 5 \cdot 10^{-3}\,C$ *an den Punkten* ***a)*** $M = (0,0)$ *und* ***b)*** $P = (r,0)$ *zu berechnen. Zuerst müssen wir die Koordinaten der Ladungen bestimmen.* Hierfür können wir die Symmetrie des Problems nutzen. Wir befassen uns zuerst mit dem Halbkreis:

Die ersten drei Punkte sind geschenkt, man kann sie direkt aus der Zeichnung ablesen, da sowohl $M = (0,0)$ *angegeben ist als auch die* x*- und* $y-$*Achse eingezeichnet sind.* Die ersten drei Punkte liegen bei $Q_1 = (0,-r)$, $Q_3 = (-r,0)$ und $Q_5 = (0,r)$, wobei wir die Punkte dem Uhrzeigersinn folgend von 6 Uhr beginnend nummerieren. *Da es sich um gleichmäßig angeordnete Ladungen handelt, können wir die fehlenden zwei Punkte leicht berechnen, da wir den Kreisradius* $r = 1\,mm$ *und den Winkel* $45\,^\circ$ *zwischen den einzelnen Punkten kennen.* Der Winkel von 45° ergibt sich, da ein Halbkreis 180° besitzt und wir 5 Punkte mit 4 gleichen Winkelabschnitten haben, d.h. $180°/4 = 45°$. Es reicht die Koordinaten eines der Punkte zu ermitteln, da die beiden Punkte symmetrisch um die x-Achse angeordnet sind. Wir nutzen ebene Polarkoordinaten:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos 225° \\ r \cdot \sin 225° \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wegen der Symmetrie folgt also für Punkt $Q_4 = \frac{r}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Zusammengefasst haben wir die Punkte:

$$\begin{aligned} Q_1 &= r\,(0,-1) \\ Q_2 &= r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ Q_3 &= r\,(-1,0) \\ Q_4 &= r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ Q_5 &= r\,(0,1)\,. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir noch schnell die Punkte für die aufgebogene Ebene. $Q_3^E = (-r,0)$ *ist für Halbkreis und Ebene identisch. Somit besitzen wir bereits die* x*-Koordinate für alle auf der Ebene befindlichen Punkte. Nun müssen wir nur noch die* y*-Koordinaten bestimmen. Wegen der Symmetrie müssen wir nur die Länge eines Kreissegmentes von* $45\,^\circ$ *mit dem Kreisradius* $r = 1\,mm$ *bestimmen.* Der Kreisumfang eines vollen Kreises ist $U = 2\pi r$. Wir betrachten nur 1/8 des Kreises, daher ist das Kreissegment

$$\Delta y = \frac{2\pi r}{8} = \frac{\pi}{4} r,$$

lang. Dies entspricht dem y-Koordinatenbeitrag für die Punkte auf der gebogenen Fläche je 45°. Somit folgt für unsere Punkte (von unten nach oben):

$$\begin{aligned} Q_1^E &= r\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right) \\ Q_2^E &= r\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_3^E &= r\,(-1,0) \\
Q_4^E &= r\left(-1,\frac{\pi}{4}\right) \\
Q_5^E &= r\left(-1,\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun alle Koordinaten der Ladungen ermittelt haben, können wir das elektrische Feld berechnen. Auf Grund des Superpositionsprinzips folgt für das elektrische Feld:

$$
\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\left|\overline{X-Q_i}\right|^2}\frac{\overline{X-Q_i}}{\left|\overline{X-Q_i}\right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\left|\overline{X-Q_i}\right|^2}\vec{e}_i, \tag{1}
$$

mit $X = M,\, P$.

a) $M = (0,0)$

Wir betrachten zuerst die Halbkreis anordnung der Ladungen. Ein weiteres mal nutzen wir die Symmetrie aus, wobei sich einige Komponenten wegheben. Q_1 und Q_5 tragen nicht bei, da ihre Wirkung auf M gleich stark, jedoch von gegensätzlichem Vorzeichen ist. Desweiteren heben sich die y-Komponenten von Q_2 und Q_4 gegenseitig auf. Es resultiert somit nur eine x-Komponente für das elektrische Feld, d.h. $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$. Wir müssen also nur die x-Komponente des elektrischen Feldes berechnen*, wobei* Q_2 *und* Q_4 *denselben Beitrag liefern.* Die y-Komponente ist wegen der Symmetrie $E_y = 0$. *Der Betrag berechnet sich mit* $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$*, d.h.* $\left|\overline{M-Q_i}\right| = r$. Hieraus resultiert also

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (0,1) \\
\vec{e}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\vec{e}_3 &= (1,0) \\
\vec{e}_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\vec{e}_5 &= (0,-1)\,.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Gleichung (1), wobei $\left|\overline{M-Q_i}\right|^2 = r^2$, liefert

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{r^2}+\frac{1}{r^2}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}r^2} = 1.085\cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
E_y &= 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$

Für die Ebene folgt, da sich die y-Komponenten wieder gegenseitig aufheben wiederum nur ein $\vec{E}$-Feld in x-Richtung. Für die 5 Ladungen gilt:

$$
\begin{aligned}
\overline{M-Q_1^E} &= r\left(1,\frac{\pi}{2}\right) \\
\overline{M-Q_2^E} &= r\left(1,\frac{\pi}{4}\right) \\
\overline{M-Q_3^E} &= r\,(1,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{M - Q_4^E} &= r\left(1, -\frac{\pi}{4}\right) \\
\overline{M - Q_5^E} &= r\left(1, -\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}
$$

d.h. die x-Komponente ist für alle Ladungen identisch. Diesmal ist jedoch der Abstand zwischen M und den Ladungen $\left|\overline{M - Q_i^E}\right|$ unterschiedlich. Die Symmetrie liefert die folgenden 3 Werte:

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{M - Q_3^E}\right| &= r \\
\left|\overline{M - Q_{1,5}^E}\right| &= r \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \\
\left|\overline{M - Q_{2,4}^E}\right| &= r \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}},
\end{aligned}
$$

dies können wir nutzen, um die $\vec{e}_i^E$ zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1^E &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \\
\vec{e}_2^E &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}}\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \\
\vec{e}_3^E &= (1, 0) \\
\vec{e}_4^E &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}}\left(1, -\frac{\pi}{4}\right) \\
\vec{e}_5^E &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}}\left(1, -\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}
$$

und Einsetzen in Gleichung (1) liefert dann das elektrische Feld in Punkt M:

$$
\begin{aligned}
E_x^E &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} + \frac{1}{r^2} + 2 \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}}\right) = 1.026 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
E_y^E &= 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$

b) $P = (r, 0)$

Wieder ergibt sich aus der Symmetrie nur ein x-komponentiger Beitrag, da sich P auf der x-Achse befindet und für die betrachtete Ladungsanordnung ist die x-Achse eine Symmetrieachse (Spiegelung).

Diesmal tragen alle 5 *Ladungen des Halbkreises etwas zum elektrischen Feld im Punkt P bei (*3 *verschiedene Beiträge, wegen der Symmetrie).* Es ergeben sich die folgenden Einheitsvektoren

$$
\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) \\
\vec{e}_3 &= \frac{1}{2}(2,0) = (1,0) \\
\vec{e}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) \\
\vec{e}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Diese führen mit Hilfe der Beträge

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{P-Q_3}\right| &= 2\cdot r \\
\left|\overline{P-Q_{1,5}}\right| &= \sqrt{2}\cdot r \\
\left|\overline{P-Q_{2,4}}\right| &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot r,
\end{aligned}
$$

und Gleichung (1) auf das elektrische Feld:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2\cdot r^2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4r^2} + 2\cdot\frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot r^2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = 6.733\cdot 10^{13}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
E_y &= 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$

Für die Ebene:

Es ergeben sich die folgenden Einheitsvektoren

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1^E &= \frac{2}{\sqrt{16+\pi^2}}\left(2, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{16+\pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right) \\
\vec{e}_2^E &= \frac{4}{\sqrt{64+\pi^2}}\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{8}{\sqrt{64+\pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{64+\pi^2}}\right) \\
\vec{e}_3^E &= \frac{1}{2}(2,0) = (1,0) \\
\vec{e}_4^E &= \frac{4}{\sqrt{64+\pi^2}}\left(2, -\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{8}{\sqrt{64+\pi^2}}, -\frac{\pi}{\sqrt{64+\pi^2}}\right) \\
\vec{e}_5^E &= \frac{2}{\sqrt{16+\pi^2}}\left(2, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{16+\pi^2}}, -\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right),
\end{aligned}
$$

und mit Hilfe der Beträge:

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{P-Q_3^E}\right| &= 2\cdot r \\
\left|\overline{P-Q_{1,5}^E}\right| &= \frac{\sqrt{16+\pi^2}}{2}\cdot r \\
\left|\overline{P-Q_{2,4}^E}\right| &= \frac{\sqrt{64+\pi^2}}{4}\cdot r,
\end{aligned}
$$

und Gleichung (1) erhalten wir das elektrische Feld:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{(16+\pi^2)\cdot r^2} \frac{4}{\sqrt{16+\pi^2}} + \frac{1}{4r^2} + 2 \cdot \frac{16}{(64+\pi^2)\cdot r^2} \frac{8}{\sqrt{64+\pi^2}}\right) = 4.028 \cdot 10^{13}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\
E_y &= 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es ist das Potential für einen Punkt P auf der x-Achse für einen gleichmäßig geladenen Kreisring mit der Flächenladungsdichte σ, innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 zu berechnen. Für die Geometrie des Problems ist es sinnvoll Zylinderkoordinaten zu verwenden, wobei wir den Radius r, den Winkel φ und die Zylinderachse x verwenden ($dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dx$). Für das Potential gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dq
\end{aligned}$$

Für die differentielle Ladung gilt $dq = \sigma \cdot 2\pi r\,dr$. *Integration über den Winkel φ liefert, wenn es keine Winkelabhängigkeit gibt 2π. Resultierend aus $Q = \sigma \cdot A_{Ring} = \sigma \cdot \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ (Ladung=Flächenladungsdichte·Fläche) d.h. $\sigma = \frac{Q}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$, folgt also*

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r\,dr = \frac{2Q}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)} r\,dr.$$

Dies können wir in die Formel für das Potential einsetzen und ausnutzen, dass $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{x^2+r^2}$ ($|\vec{r}| = x$, $|\vec{r}'| = r$) gilt, da wir einen Punkt auf der x-Achse betrachten:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} r\,dr \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \left[\sqrt{x^2+r^2}\right]_{R_1}^{R_2} \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \left(\sqrt{x^2+R_2^2} - \sqrt{x^2+R_1^2}\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{x^2+R_2^2} - \sqrt{x^2+R_1^2}\right)
\end{aligned}$$