

Übungsblatt 9

Ausgabe: 16.6.2006

Rückgabe: 26.6.2006 vor der Vorlesung

1. In der Chemie werden an Stelle der komplexen Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\theta, \varphi)$ mit $m \neq 0$ häufig Linearkombination der Kf.en $Y_m^l(\theta, \varphi)$ und $Y_{-m}^l(\theta, \varphi)$ verwendet, die real sind.
a) Erraten sie zwei solche, wieder auf 1 normierte, Linearkombinationen für die Kugelflächenfunktionen vom Grad $l = 1$, $m \neq 0$.

b) Die Kugelflächenfunktionen sind skalare Funktionen von (θ, φ) , das heißt sie könnten z. B. dargestellt werden durch verschieden dichte Schraffierung der Punkte auf einer Kugel vom Radius $r = 1$. Häufig stellt man sie stattdessen dar, in dem man in einem drei-dimensionalen Koordinatensystem mit Kugelkoordinaten die Fläche $\{(r, \theta, \varphi), r = |Y_m^l(\theta, \varphi)|^2\}$ zeichnet. Zeichnen Sie schematisch $Y_0^1(\theta, \varphi)$ und eine der Linearkombinationen aus Teil a) auf beide Weisen.

(2 Punkte)

2. Berechnen Sie l_x, l_y, l_z in Kugelkoordinaten und zeigen Sie das für l^2 in der Vorlesung angegebene Ergebnis:

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],$$

mit den Polarwinkeln und Azimuthwinkeln θ und φ .

(2 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z, \quad [l^2, l_z] = 0, \quad [l_z, x] = i\hbar y$$

ist.

(2 Punkte)

4. Auch in Atomen mit mehr als einem Elektron können die einzelnen Elektronen näherungsweise mit den Quantenzahlen n, l, m des Elektrons im Wasserstoff bezeichnet werden. In dieser Näherung sind die Winkelanteile der Wellenfunktionen jedes Elektrons wieder durch die Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\theta, \varphi)$ gegeben. Die r -abhängige Wellenfunktion ändert sich dagegen. Auf Grund ihrer quantenmechanischen Natur dürfen maximal zwei Elektronen in allen drei Quantenzahlen n, l, m übereinstimmen. (Zwei Elektronen, weil sich diese noch in der Spin-Einstellung unterscheiden können.) In jede n, l Schale können also $2(l+1)$ Elektronen gepackt werden. Betrachte jetzt die $2 \cdot 5$ Elektronen in der $n = 3, l = 2$ Schale, mit Radialwellenfunktion $R_{32}(r)$. Zeige, dass die Summe der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Elektronen

$$\sum_{m=-2}^2 |\psi_{32m}(r, \theta, \varphi)|^2$$

nicht von θ, φ abhängt, das heißt, sie ist kugelsymmetrisch. (Dieses Ergebnis gilt allgemein: Abgeschlossene Unterschalen haben kugelsymmetrische Ladungsverteilungen.)

(3 Punkte)

5. Berechnen Sie die Energieaufspaltung in unserem Experiment zum Zeeman-Effekt am Cd (reiner Bahnmagnetismus = 'normaler' Zeeman-Effekt) in einem Magnetfeld von 840 mT.

Setzen Sie diese in Beziehung zur Energie des $5d \rightarrow 5p$ Übergangs mit einer Wellenlänge von 643.8 nm.

Berechnen Sie für dasselbe Magnetfeld die Energieaufspaltung im Grundzustand des Wasserstoffs und die entsprechende Aufspaltung für ein Proton (das keinen Bahndrehimpuls hat) (Spin $\frac{1}{2}$, g -Faktor 5.58). Beachten Sie, dass im Bohr'schen Magneton die Teilchenmasse auftritt.

(1 Punkt)