Heiko Dumlich 25. Juni 2006

9 Übungsblatt zur Experimentalphysik III

9.1 Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\theta,\varphi)$

(a)

Wir erraten zwei Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen, die wieder auf 1 normiert sind, die zudem vom Grad $l = 1$, $m \neq 0$ sind:

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{11} \pm Y_{1,-1}\right) \\ Y_b &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{1,-1} \pm Y_{11}\right) \end{aligned}$$

Wir wählen bei beiden Fällen das $-$. Diese Linearkombinationen sind auf 1 normiert. (siehe *mathematica* printout im Anhang)

(b)

Die Graphiken sind im Anhang zu finden.

9.2 Drehimpuls für ein Teilchen

Es ist zu zeigen, dass die Beziehung:

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{1}$$

gilt. Hierzu sind zuerst l_x, l_y und l_z in Kugelkoordinaten zu berechnen. Wir benutzen die Beziehungen für die Kugelkoordinatentransformation:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Somit folgt aus der allgemeinen Form der inversen Jacobi-Matrix für Kugelkoordinaten:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r} & \frac{\sin\varphi\cos\theta}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei für die Differentialoperatoren:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)^T = \left(J^{-1}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^T,$$

gilt, dies ist äquivalent zu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \sin\varphi\sin\theta & \frac{\sin\varphi\cos\theta}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Somit folgt für die Differentialoperatoren:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{4}$$

Nun betrachten wir $\vec{l}$:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \frac{\hbar}{i}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Hierbei gilt $p_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Somit folgt:

$$\frac{\hbar}{i}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\hbar}{i}\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{e}_x + \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{e}_z\right\}$$

somit folgt also für die Drehimpulskomponenten in kartesischen Koordinaten:

$$l_x = \frac{\hbar}{i}\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{5}$$

$$l_y = \frac{\hbar}{i}\left[z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right] \tag{6}$$

$$l_z = \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{7}$$

Nun können wir die Kugelkoordinatentransformation und die Differentialoperatoren aus (2), (3) und (4) einsetzen und finden:

$$
\begin{aligned}
l_x &= \frac{\hbar}{i}\left[r\sin\varphi\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-r\cos\theta\left(\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]\\
l_y &= \frac{\hbar}{i}\left[r\cos\theta\left(\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-r\cos\varphi\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\\
l_z &= \frac{\hbar}{i}[r\cos\varphi\sin\theta\left(\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&- r\sin\varphi\sin\theta\left(\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)]
\end{aligned}
$$

nach einer mehr oder minder kurzen Rechnung folgt:

$$
\begin{aligned}
l_x &= \frac{\hbar}{i}\left[-\sin\varphi\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\varphi\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\\
l_y &= \frac{\hbar}{i}\left[\cos\varphi\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\varphi\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\\
l_z &= \frac{\hbar}{i}\left[\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]
\end{aligned}
$$

Somit folgt also für die Drehimpulsoperatoren:

$$
\begin{aligned}
l_x &= -i\hbar\left[-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] &(8)\\
l_y &= -i\hbar\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] &(9)\\
l_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} &(10)
\end{aligned}
$$

Nun können wir hiermit in (1) eingehen und finden:

$$
\begin{aligned}
l^2 = l_x^2+l_y^2+l_z^2 &= -\hbar^2\left[\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^2+\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^2+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\\
&\Leftrightarrow -\hbar^2[\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\sin\varphi\cos\varphi\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\\
&- \frac{\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cos\varphi\sin\varphi\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&+ \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]\\
&\Leftrightarrow -\hbar^2[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}] \\
\Leftrightarrow \quad & -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\
\Leftrightarrow \quad & -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\
= \quad & -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]
\end{aligned}
$$

Mit $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.
Somit ist verifiziert, dass:

$$
l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]
$$

gilt.

9.3 Kommutatoren

Es ist zu zeigen, dass:

$$
[l_x, l_y] = i\hbar l_z, \quad \left[l^2, l_z\right] = 0, \quad [l_z, x] = i\hbar y
$$

gilt.
Hierbei sind die Drehimpulskomponenten in kartesischen Koordinaten durch (5) , (6) und (7) definiert, während die Drehimpulskomponenten in Kugelkoordinaten durch (8) , (9) und (10) gegeben sind.
Wir betrachten nun den ersten Kommutator:

$$
[l_x, l_y] = i\hbar l_z
$$

$$
\begin{aligned}
[l_x, l_y] \quad = \quad & l_x l_y - l_y l_x \\
\Leftrightarrow \quad & -\hbar^2\left(\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right] - \left[z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right]\right) \\
\Leftrightarrow \quad & -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & (i\hbar)\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
= \quad & i\hbar l_z
\end{aligned}
$$

von der zweiten zur dritten Zeile fallen viele Terme weg, da die Ableitung von diesen 0 liefert.

Betrachten wir nun den zweiten Kommutator, wobei wir für diesen Kugelkoordinaten benutzen und unsere Ergebnisse aus **Aufgabe 2** nutzen:

$$\left[l^2, l_z\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\left[l^2, l_z\right] &= l^2 l_z - l_z l^2 \\
&\Leftrightarrow -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \\
&- \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(-\hbar^2\right)\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\
&\Leftrightarrow i\hbar^3 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \\
&- i\hbar^3 \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\
&\Leftrightarrow i\hbar^3 \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \\
&\Leftrightarrow i\hbar^3 \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da die Ableitungen 0 liefern, wie man sofort sieht.
Wir betrachten den letzten Kommutator:

$$[l_z, x] = i\hbar y$$

$$\begin{aligned}
[l_z, x] &= l_z x - x l_z \\
&\Leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right] x - x\frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right] \\
&\Leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\left[-y\right] \\
&= i\hbar y
\end{aligned}$$

Von der zweiten zur dritten Zeile erhalten wir wiederum durch die Ableitung bzw. durch die auf nichts wirkende Ableitungen 0 und da zusätzlich $-\frac{1}{i} = i$ wegen $i^2 = -1$, gilt, dürfen wir die Transformation zwischen der 3. und 4. Zeile machen, indem wir Zähler und Nenner mit i erweitern.

9.4 Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Elektronen mit $n = 3$ und $l = 2$

Es ist zu zeigen, dass die Summe der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Elektronen

$$\sum_{m=-2}^{2} |\psi_{32m}(r,\theta,\varphi)|^2$$

nicht von θ, φ abhängt, dass heisst, sie ist kugelsymmetrisch. Es folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-2}^{2} |\psi_{32m}(r,\theta,\varphi)|^2 &= |\psi_{3,2,-2}(r,\theta,\varphi)|^2 + |\psi_{32,-1}(r,\theta,\varphi)|^2 + |\psi_{320}(r,\theta,\varphi)|^2 + \\ &+ |\psi_{321}(r,\theta,\varphi)|^2 + |\psi_{322}(r,\theta,\varphi)|^2\end{aligned}$$

Wobei die Definitionen für die Radialwellenfunktion:

$$R_{nl}(r) = -\left[\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+1)!\right]^3}\right] \rho^l L_{n+1}^{2l+1}(\rho)\, e^{-\frac{\rho}{2}},$$

mit $\rho = r\frac{2Z}{na_0}$ und $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2\mu}\hbar^2$ lautet und sich die Wellenfunktion aus dieser und der Kugelflächenfunktion zusammensetzt:

$$\psi_{32m}(r,\theta,\varphi) = R_{32}(r)\, Y_{2m}(\theta,\varphi)$$

Nun können wir diese Definition einsetzen und die $|R_{32}(r)|^2$ herausziehen, da diese einen gleichen Faktor für jeden Summanden in der Summe darstellen, somit folgt:

$$\sum_{m=-2}^{2} |\psi_{32m}(r,\theta,\varphi)|^2 = |R_{32}(r)|^2 \sum_{m=-2}^{2} |Y_{2m}(r,\theta,\varphi)|^2$$

Da wir nur die θ, φ Unabhängigkeit nachweisen müssen, können wir den Faktor vorerst ausser Acht lassen, da er nur eine r-Abhängigkeit besitzt, wir betrachten also die Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-2}^{2} |Y_{2m}(r,\theta,\varphi)|^2 &= |Y_{2,-2}(r,\theta,\varphi)|^2 + |Y_{2,-1}(r,\theta,\varphi)|^2 + |Y_{2,0}(r,\theta,\varphi)|^2 \\ &+ |Y_{21}(r,\theta,\varphi)|^2 + |Y_{22}(r,\theta,\varphi)|^2\end{aligned}$$

Hiermit können wir in *mathematica* eingehen (notebook ist im Anhang zu finden) und wir erhalten:

$$\sum_{m=-2}^{2} |Y_{2m}(r,\theta,\varphi)|^2 = \frac{5}{4\pi},$$

das keine θ, φ-Abhängigkeit mehr besitzt. Somit ist das zu Zeigende gezeigt. Für das Ergebnis mit der Radialwellenfunktion bitte den Anhang konsultieren.

9.5 Energieaufspaltung beim Zeeman-Effekt am Cadmium $^{64}_{48}Cd$

Es ist die Energieaufspaltung für unser Experiment zum Zeeman-Effekt am Cd bei einem Magnetfeld von $\left|\vec{B}\right| = 840\,mT = 0.84\,T$ zu berechnen. Es folgt mit:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \Rightarrow U = \mu_B m_s B$$

Somit folgt also mit dem Bohrschen Magneton $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_K}$:

$$U_{Cd} = \frac{e\hbar}{2m_{Cd}} m_s B = 1.901 \cdot 10^{-29}\,J = 1.186 \cdot 10^{-10}\,eV$$

Wir vergleichen mit dem Übergang von $5d \rightarrow 5p$ mit einer Wellenlänge von $\lambda = 643.8\,nm$, für diese ergibt sich eine Energie von:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow E_{5d\rightarrow 5p} = 3.088 \cdot 10^{-19}\,J = 1.927\,eV$$

Wir betrachten die Aufspaltung für das Wasserstoffatom:

$$U_H = \frac{e\hbar}{2m_H} m_s B = 2.121 \cdot 10^{-27}\,J = 1.324 \cdot 10^{-8}\,eV$$

Und für ein Proton:

$$U_P = \mu_P g_e \frac{1}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{B} = \mu_P g_e m_s B = 1.1837 \cdot 10^{-26}\,J = 7.388 \cdot 10^{-8}\,eV$$