Heiko Dumlich 19. Juni 2006

8 Übungsblatt zur Experimentalphysik III

8.1 Minimale Energien

(a)

Wir betrachten ein Fadenpendel der Länge $l = 1\,m$, auf der Erdoberfläche (Höhe $0\,m$), somit gilt die Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$. Für das Fadenpendel gilt:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Für die Nullpunkts- bzw. Minimalenergie gilt:

$$E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Somit folgt für das Fadenpendel:

$$E_{min} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} = 1.651 \cdot 10^{-34}\,J = 1.031 \cdot 10^{-15}\,eV$$

(b)

Für die Frequenz des Schwingkristalls der Quarzuhr gilt $\nu = 32768\,Hz$, somit folgt eine minimale Energie von:

$$E_{min} = \frac{h\nu}{2} = 1.086 \cdot 10^{-29}\,J$$

(c)

Für die reduzierte Masse des O_2 können, indem wir in der Mitte zwischen den beiden Atomen eine virtuelle Wand einfügen: $\mu = \frac{m_O}{2}$ ansetzen. Nun folgt mit:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{m_O}} = 2.977 \cdot 10^{14}\,\frac{1}{s}$$

Für die Energie folgt somit, wobei $k = 1177\,\frac{N}{m}$ und $m_O = 2.657 \cdot 10^{-26}\,kg$:

$$E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2} = 1.570 \cdot 10^{-20}\,J = 97.96\,meV$$

8.2 Harmonischer Oszillator und klassischer Umkehrpunkt

(a)

Für die Energie-Eigenwerte folgt:

$$E_1 = 4.709 \cdot 10^{-20}\,J = 0.294\,eV$$

$$E_8 = 2.668 \cdot 10^{-19}\,J = 1.665\,eV$$

$$E_{20} = 6.435 \cdot 10^{-19}\,J = 4.016\,eV$$

(b)

Die maximale Auslenkung existiert bei maximaler potentieller Energie, d.h. $E = V$, mit $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ folgt somit:

$$x_v = \sqrt{\frac{E}{k}}$$

wobei wir diesmal angenommen haben, dass die Kraftkonstante doppelt so stark ist und dafür nicht die reduzierte Masse verwenden. Somit folgen:

$$x_1 = 6.325 \cdot 10^{-12}\,m$$

$$x_8 = 1.506 \cdot 10^{-11}\,m$$

$$x_{20} = 2.338 \cdot 10^{-11}\,m$$

(c)

Für die Wellenfunktion gilt:

$$\varphi_v(x) = N_v H_v\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}$$

mit $N_v = \frac{1}{\left(2^v v! \pi^{\frac{1}{2}} \alpha\right)^{\frac{1}{2}}}$, $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}}$ und H_v den Hermitischen Polynomen. Wir betrachten die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\varphi_v(x)|^2$ und die Umkehrpunkte der drei Eigenwerte. (siehe mathematica printout im Anhang).

Wie man aus den Graphen erkennen kann, befinden sich die Umkehrpunkte nicht am Ende der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, d.h.das klassische Bild versagt hier, wobei man sieht, dass hinter dem Umkehrpunkt noch ein Aufenthaltswahrscheinlichkeitsbereich existiert.

8.3 Elektron im H-Atom

Das Elektron des H-Atoms kann sich im Grundzustand klassisch nicht im Gebiet $r > 2a_0$ aufhalten, wobei a_0 der Radius der ersten Bohr'schen Bahn sei ($5.292 \cdot 10^{-11}\, m$). Für die Wellenfunktion des Elektrons ergibt sich, wobei dieser nur von der radialen Koordinate in Kugelkoordinaten abhängt:

$$\varphi_1(r) = Ce^{-\frac{r}{a_0}}$$

(a)

Wir bestimmen die Normierungskonstante C, indem wir die Normierungsbedingung ansetzen:

$$1 = \int_V d^3x\, |\varphi_1(x)|^2 = \int_V d^3x\, \varphi_1^*(x)\, \varphi_1(x)$$

Wir setzen ein und finden auf Grund der Abhängigkeit von r und der Winkelunabhängigkeit:

$$1 = 4\pi C^2 \int dr\, r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

Durch partielle Integration folgt:

$$1 = 4\pi C^2 \left(\left[-\frac{a_0 r^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty + a_0 \int_0^{2a_0} dr\, r e^{-\frac{2r}{a_0}} \right)$$

eine zweite partielle Integration liefert:

$$1 = 4\pi C^2 \left(0 + \left[-\frac{a_0^2 r}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty + \frac{a_0^2}{2} \int_0^{2a_0} dr\, e^{-\frac{2r}{a_0}} \right)$$

dies liefert nun nach Integration:

$$1 = 4\pi C^2 \left(0 + \frac{a_0^2}{2} \left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_0^\infty \right)$$

Nun können wir auflösen, nach C^2 umstellen und die Wurzel ziehen um die Normierungskonstante C zu erhalten:

$$C = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{1}{\pi a_0}}$$

(b)

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im klassisch verbotenen Gebiet $r > 2a_0$ anzutreffen:

$$W = 4\pi \int_{2a_0}^{\infty} dr \; |\varphi_1(x)|^2 \cdot r^2 = 4\pi \int_{2a_0}^{\infty} dr \, C^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^2$$

Somit folgt:

$$W = 4\pi C^2 \int_{2a_0}^{\infty} dr \, r^2 \, e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

wir können dreimal partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
W &= 4\pi C^2 \int_{2a_0}^{\infty} dr \, r^2 \, e^{-\frac{2r}{a_0}} \\
&\Leftrightarrow 4\pi C^2 \left(\left[-\frac{a_0 r^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_{2a_0}^{\infty} + a_0 \int_{2a_0}^{\infty} dr \, r \, e^{-\frac{2r}{a_0}} \right) \\
&\Leftrightarrow 4\pi C^2 \left(2a_0^3 e^{-4} + a_0 \left(\left[-\frac{a_0 r}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_{2a_0}^{\infty} + \frac{a_0}{2} \int_{2a_0}^{\infty} dr \, e^{-\frac{2r}{a_0}} \right) \right) \\
&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\pi C^2 \left(2a_0^3 e^{-4} + a_0^3 e^{-4} + \frac{a_0^2}{2} \left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]_{2a_0}^{\infty} \right) \\
&\Leftrightarrow 4\pi C^2 \left(3a_0^3 e^{-4} + \frac{a_0^3}{4} e^{-4} \right) \\
W &= 13\pi C^2 a_0^3 e^{-4}
\end{aligned}$$

Setzen wir nun noch die Konstante ein:

$$W = 13 e^{-4}$$

Nun können wir noch den numerischen Wert bestimmen:

$$W = 13 e^{-4} \approx 0.238$$

die Aufenthaltswahrscheinlichkeit W über den klassischen Bereich hinaus, bzw. sich außerhalb des klassischen Bereiches zu befinden, beträgt somit ca. 23.8%.

8.4 Unschärfe des Erwartungswertes des Ortes

Die Unschärfe des Erwartungswertes des Ortes kann auch als:

$$\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert werden. Wir betrachten ein Teilchen in einem unendlich hohen Potentialtopf. Für die Wellenfunktion folgt somit ($C_n = \frac{1}{\sqrt{a}}$, siehe Vorlesung vom 2./9.6.'06):

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right) & n\,ungerade \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right) & n\,gerade \end{cases}$$

Mit der Definition:

$$\langle O\rangle = \int dx\, \varphi_n^*(x)\; O\, \varphi_n(x)$$

folgt für unser Problem:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-a}^{a} dx\, \varphi_n^*(x)\; x^2\, \varphi_n(x)$$

und

$$\langle x\rangle^2 = \left(\int_{-a}^{a} dx\, \varphi_n^*(x)\; x\, \varphi_n(x)\right)^2$$

Einsetzen der Wellenfunktion liefert für *ungerade* n :

$$\langle x^2\rangle_u = \int_{-a}^{a} dx\, \frac{x^2}{a} \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)$$

bzw.

$$\langle x\rangle_u^2 = \left(\int_{-a}^{a} dx\, \frac{x}{a} \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)\right)^2$$

Diese Integrale liefern mit maple:

$$\langle x^2\rangle_u = \frac{a^2\left(6n\pi + n^3\pi^3 - 6n^2\pi^2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 12\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 12n\pi\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3n^3\pi^3}$$

nun sieht man sofort, dass die Mischterme aus $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ und die $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ Terme alle Null liefern, da für die ungeraden n der cos verschwindet. Somit vereinfacht sich der Term zu:

$$\langle x^2\rangle_u = \frac{a^2\left(6n\pi + n^3\pi^3\right)}{3n^3\pi^3} = \frac{a^2}{3n^2\pi^2}\left(6 + n^2\pi^2\right)$$

Wir können dies auch umschreiben zu:

$$\langle x^2\rangle_u = 2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 + \frac{a^2}{3}$$

Wir betrachten den zweiten Term, wir erhalten:

$$\langle x\rangle_u^2 = (0)^2 = 0$$

Dies ist leicht zu begründen, da wir von $-a$ bis a integrieren und der $\sin^2$ eine durch die Quadrierung symmetrische Funktion darstellt, während x antisymmetrisch ist, somit heben sich die Terme genau auf.

Einsetzen der Wellenfunktion liefert für *gerade* n :

$$\langle x^2\rangle_g = \int_{-a}^{a} dx\,\frac{x^2}{a}\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)$$

bzw.

$$\langle x\rangle_g^2 = \left(\int_{-a}^{a} dx\,\frac{x}{a}\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)\right)^2$$

Diese Integrale liefern mit maple:

$$\langle x^2\rangle_g = \frac{a^2\left(-6n\pi + n^3\pi^3 + 6n^2\pi^2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 12\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 12n\pi\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3n^3\pi^3}$$

nun sieht man wieder, dass die Mischterme aus $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, und die $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ alle Null liefern, da für die geraden n sin verschwindet. Somit vereinfacht sich der Term zu:

$$\langle x^2\rangle_g = \frac{a^2\left(-6n\pi + n^3\pi^3 + 12n\pi\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3n^3\pi^3}$$

Wir können dies auch umschreiben zu:

$$\langle x^2\rangle_g = -2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 + \frac{a^2}{3} + \left(\frac{2a}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$$

Wir betrachten den zweiten Term, wir erhalten:

$$\langle x\rangle_g^2 = (0)^2 = 0$$

Die Begründung geht wie oben, da wir von $-a$ bis a integrieren und der $\cos^2$ eine durch die Quadrierung symmetrische Funktion darstellt, während x antisymmetrisch ist, somit heben sich die Terme genau auf.

Somit folgt für den gesamten Term durch Addition von geradem und ungeraden Teil($\langle x\rangle^2 = \langle x\rangle_g^2 + \langle x\rangle_u^2$):

$$\Delta x_n = \left(\frac{a^2}{3n^2\pi^2}\left(2n^3\pi^3 + 12n\pi\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) - 0\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}n\pi}\left(2n^2\pi^2 + 12\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Für alle ungeraden n verschwindet hierbei der cos Term und die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\Delta x_{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\,, n \in \mathbb{N}_0$$

Wir können auch den Fall für große n betrachten, somit wird der $\cos^2$ Term irrelevant, da er nur Werte zwischen 0 und 1 liefert, somit können wir vereinfacht schreiben:

$$\Delta x_{n,gro} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a \,, n \in \mathbb{N}_0$$

Da sich das klassische Teilchen überall gleich gerne aufhält, besteht für das Teilchen keine Unschärfe. Somit gilt $\Delta x_{klassisch} = 0$.
Wir betrachten den gleichen Fall für die Unschärfe des Erwartungswertes des Impulses:

$$\Delta p = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wobei der Operator p als:

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Rightarrow p^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

definiert ist. Ein kurzer Blick in die Schrödinger Gleichung, wobei wir $V(x) = 0$setzen zeigt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Was womit wir auch sofort sehen, dass:

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} = 2mE$$

gelten muss, mit der Definition der Energie:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}$$

folgt somit:

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{4a^2} = \left(\frac{\hbar n \pi}{2a} \right)^2$$

welches wir weiter unten auch noch als Ergebnis durch eine Rechnung verifizieren werden, wobei auch das direkte Einsetzen und die Orthogonalität der Wellenfunktion:

$$\int_{-a}^{a} dx\, \varphi_n^*(x)\, \varphi_n(x) = 1$$

sofort dieses Ergebnis liefern würde.
Nun können wir die Erwartungswerte also auch direkt mit

$$\langle p^2 \rangle = -\int_{-a}^{a} dx\, \varphi_n^*(x)\; \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\, \varphi_n(x)$$

und

$$\langle p\rangle^2 = \left(\int_{-a}^{a} dx\, \varphi_n^*(x)\ \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\,\varphi_n(x)\right)^2$$

berechnen. Der $\langle p\rangle^2$ Term liefert Null, da die Ableitung von sin einen cos liefert, somit haben wir eine Integration über eine symmetrische Funktion cos und eine antisymmetrische Funktion sin (symmetrisch und antisymmetrisch meint gerade bzw. ungerade ^^, ich weis nicht, wie man das am besten formuliert).

Daher brauchen wir nur noch den $\langle p^2\rangle$ Term betrachten, wobei wir durch die doppelte Ableitung des sin wieder einen sin erhalten, wobei dieser noch mit einem Minus und Faktor versehen ist:

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{4a^3}\int_{-a}^{a} dx\ \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)$$

Nun müssen wir nur noch diese einfache $\sin^2$ Integration ausführen, somit erhalten wir:

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{4a^3}\frac{a\left(-2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+n\pi\right)}{n\pi}$$

Hier funktioniert wieder das Argument von oben um den Mischterm aus sin und cos loszuwerden:

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{4a^2} = \left(\frac{\hbar n\pi}{2a}\right)^2$$

somit erhalten wir also einen wunderschön einfachen Term. Für den gesamten Term ergibt sich somit:

$$\Delta p = \left(\left(\frac{\hbar n\pi}{2a}\right)^2 - 0\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar n\pi}{2a}$$

Für das Unschärfeprinzip (Heisenbergsche Unschärferelation):

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Wir betrachten die Multiplikation unserer beiden Faktoren:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2n^2\pi^2 + 12\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

da der Faktor vor dem $\frac{\hbar}{2}$ größer als 1 werden muss, da der cos das erste mal für $n = 2$ einen negativen Wert liefert und schon für diesen der vordere Term größer ist, der vordere wird auch mit n^2 wachsen, während der cos Term zwischen $1,0$ und -1 springt und somit also die Ungleichung, sprich die Heisenbergsche Unschärferelation, erfüllt ist.