Heiko Dumlich 11. Juni 2006

7 Übungsblatt zur Experimentalphysik III

7.1 Elektron im Potentialtopf

Wir betrachten einen unendlich hohen Potentialtopf der Weite $2a$, in dem sich ein Elekron befinde. Zu bestimmen sind die ersten drei Eigenwerte der Energie dieses Elektrons. Die Konstante a ist gegeben mit $a = 1\,\text{Å}$.Zudem gilt:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & bei\ -a < x < a \\ \infty & sonst \end{cases}$$

Wir nutzen den Ansatz, dass $\varphi(x)$ die Lösung von

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen $\varphi(-a) = 0$ und $\varphi(a) = 0$ ist. Wir nutzen eine stehende Welle für $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \tag{2}$$

Für k folgt Aufgrund der Randbedingung:

$$k = \frac{\pi}{2}\frac{n}{a}$$

Da für dieses, der $\sin(ka) = \sin(-ka) = 0$ Term für gerade n und der $\cos(ka) = \cos(-ka) = 0$ Term für ungerade n erfüllt wird.

Nun nutzen wir (1) und setzen dort (2) ein:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(A\sin(kx) + B\cos(kx)\right) &= E\varphi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k^2A\sin(kx) - k^2B\cos(kx)\right) &= E\varphi(x) \\ \frac{\hbar^2k^2}{2m} &= E \end{aligned}$$

Nun folgt, wenn wir unser k von oben einsetzen für die Eigenwerte der Energie:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8m}\frac{n^2}{a^2} = \frac{h^2}{32m}\frac{n^2}{a^2}$$

Nun können wir die ersten drei Eigenwerte $n = 1, 2, 3$ berechnet, es folgt:

$$E_1 = 1.51 \cdot 10^{-18}\,J = 9.4\,eV$$

$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 6.02 \cdot 10^{-18}\,J = 37.6\,eV$$

$$E_3 = 9 \cdot E_1 = 1.36 \cdot 10^{-17}\,J = 84.6\,eV$$

7.2 Frank-Hertz-Versuch am H-Atom

Beim Frank-Hertz-Versuch treten bei den Beschleunigungsspannungen von $10.21\,V$ und $12.10\,V$ Abnahmen des Anodenstroms auf. Es sind die Energien und Wellenlängen aller als Folge der Anregung von den Wasserstoffatomen ($Z = 1$) ausgestrahlten Fluoreszenzlinien anzugeben. Für die kinetischen Energien der Elektronen folgt mit den Beschleunigungsspannungen:

$$E_{kin,1} = 10.21\,eV = 1.64 \cdot 10^{-18}\,J$$

$$E_{kin,2} = 12.10\,eV = 1.94 \cdot 10^{-18}\,J$$

$$E_{kin,2-1} = 1.89\,eV = 3.03 \cdot 10^{-19}\,J$$

Es gilt: $\nu = \frac{c}{\lambda}$ und $E = h\nu$,somit folgt durch einsetzen und umstellen:

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

Setzen wir nun unsere Energien von oben ein, so folgt für die Wellenlängen:

$$\lambda_1 = 121.6\,nm$$

$$\lambda_2 = 102.5\,nm$$

$$\lambda_{2-1} = 656.5\,nm$$

Hierbei sind λ_1 der $m = 2$ Übergang der Lyman-Serie (ultraviolett), λ_2 der $m = 3$ Übergang der Lyman-Serie (ultraviolett) und λ_{2-1} der $m = 3$ Übergang der Balmerserie (rot).

7.3 Tunneleffekt - Herleitung

Wir betrachten das Verhalten eines Teilchens mit $0 < E < V_0$ bei Konfrontation mit einer endlich hohen und breiten Potentialbarriere. Das Gebiet der Potentialbarriere besitze die Breite a.

(a)

Wir betrachten die zeitunabhängige Wellenfunktion $\varphi(x)$,für diese gilt:

$$\mathcal{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

mit dem Hamilton-Operator für die $x - Koordinate$:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0$$

Wir betrachten die Gebiete außerhalb vor $(Gebiet\, I)$, innerhalb $(Gebiet\, II)$ und außerhalb hinter $(Gebiet\, III)$ der Potentialbarriere, wobei wir die Ansätze:

$$\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\varphi_{II}(x) = Ce^{-kx} + De^{kx}$$

$$\varphi_{III}(x) = Ee^{ikx}$$

für die Wellenfunktion machen. Betrachten wir nun die Gebiete:

$$I; II; III \,:\, \mathcal{H}\varphi_{I;II;III}(x) = E\varphi_{I;II;III}(x)$$

Einsetzen des Operators, wobei in $Gebiet\, I; III$ $V_0 = 0$ und im $Gebiet\, II$ $V_0 = V_0$ gilt und umformen liefert:

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_I^2 = E \Rightarrow k = k_{I,III} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\alpha = k_{II} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

(b)

Nun müssen auf Grund der Stetigkeit der Wellenfunktion $\varphi(x)$ und deren Ableitung $\frac{d\varphi}{dx}$ folgende Beziehungen, wobei $D = 0$ gilt, da wir Reflexion innerhalb der Potentialbarriere durch Hinweis in der Vorlesung vernachlässigen sollen, gelten:

$$\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$$

$$\varphi_{II}(a) = \varphi_{III}(a)$$

Dies führt auf:

$$A + B = C \tag{3}$$

$$ikA - ikB = -\alpha C \tag{4}$$

$$Ce^{-\alpha a} = Ee^{ika} \tag{5}$$

$$-\alpha Ce^{-\alpha a} = ikEe^{ika} \tag{6}$$

Nun können wir das Gleichungssystem aus $(3), (4), (5)$ und (6) lösen:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\alpha}{k}\right)C$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{\alpha}{k}\right)C$$

$$E = Ce^{-\alpha a\left(1+i\frac{k}{\alpha}\right)}$$

(c)

Für den Transmissionskoeffizienten folgt somit:

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{\left|\left(e^{-\alpha a\left(1+i\frac{k}{\alpha}\right)}\right)^2\right|}{\left|\frac{1}{4}\left(1+i\frac{\alpha}{k}\right)^2\right|} = \frac{1-\frac{E}{V_0}}{\left(1-\frac{E}{V_0}\right) + \left(\frac{V_0}{4E}\right)\cdot\sinh^2(\alpha a)}$$

wobei $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

Leider ist die Aufgabe auf Grund des Hinweises in der Vorlesung meiner Meinung nach nicht lösbar ! Der zweite Term innerhalb der Barriere muss beachtet werden, da wir sonst einen Widerspruch durch unser Gleichungssystem erhalten, da durch die Abwesenheit von dem $D - Term$ die Relation $ik = -\alpha$ entsteht. Dies ist aber offensichtlich falsch !

Daraus folgt das folgendes Gleichungssystem Gültigkeit besitzen muss:

$$A + B = C + D \tag{7}$$

$$ikA - ikB = -\alpha C + \alpha D \tag{8}$$

$$Ce^{-\alpha a} + De^{\alpha a} = Ee^{ika} \tag{9}$$

$$-\alpha Ce^{-\alpha a} + \alpha De^{\alpha a} = ikEe^{ika} \tag{10}$$

Hierbei findet man durch Annahme der Normierung des einfallenden Flußes von $A = 1$:

$$1 + B = C + D$$

$$ik\,(1-B) = -\alpha C + \alpha D$$

Somit ergibt sich:

$$B = \frac{2\alpha D - \alpha - ik}{(\alpha - ik)} \Leftrightarrow D = \frac{\alpha + ik + (\alpha - ik)\,B}{2\alpha}$$

für C folgt:

$$B = \frac{2\alpha C - \alpha + ik}{(\alpha + ik)} \Leftrightarrow C = \frac{\alpha - ik + (\alpha + ik)\,B}{2\alpha}$$

Nun betrachten wir E :

$$E = \frac{2\alpha D}{(\alpha + ik)} e^{a(\alpha - ik)} \Leftrightarrow D = \frac{(\alpha + ik)\,E}{2\alpha} e^{-a(\alpha - ik)}$$

bzw.

$$E = \frac{2\alpha C}{(ik - \alpha)} e^{-a(\alpha + ik)} \Leftrightarrow C = \frac{(ik - \alpha)\,E}{2\alpha} e^{a(\alpha + ik)}$$

Der Vergleich zwischen C und D liefert:

$$C = \frac{D\,(\alpha + ik) - 2ik}{(\alpha - ik)} \Leftrightarrow D = \frac{C\,(\alpha - ik) + 2ik}{(\alpha + ik)}$$

Nun können wir C mit D in die Gleichung für C mit E einsetzen und erhalten:

$$D = \frac{2ik}{(\alpha + ik)} - \frac{(ik - \alpha)^2\,E}{2\alpha\,(\alpha + ik)} e^{a(\alpha + ik)}$$

Nun können wir diese D mit dem anderen Term für D in Abhängigkeit von E von oben gleichsetzen:

$$\frac{(\alpha + ik)\,E}{2\alpha} e^{-a(\alpha - ik)} = \frac{2ik}{(\alpha + ik)} - \frac{(ik - \alpha)^2\,E}{2\alpha\,(\alpha + ik)} e^{a(\alpha + ik)}$$

Wir stellen nach E um und erhalten:

$$E\left((\alpha + ik)^2\,e^{-a(\alpha - ik)} + (ik - \alpha)^2\,e^{a(\alpha + ik)}\right) = \frac{ik}{\alpha}$$

also folgt für E :

$$E = \frac{ik}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{(\alpha + ik)^2\,e^{-a(\alpha - ik)} + (ik - \alpha)^2\,e^{a(\alpha + ik)}}\right)$$

Nun haben wir durch $A = 1$ für den Transmissionskoeffizienten leichtes Spiel:

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = |E|^2$$

Also müssen wir nur das Betragsquadrat von E berechnen:

$$T = |E|^2 = \left| \frac{-k^2}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{1}{(\alpha + ik)^2 e^{-a(\alpha - ik)} + (ik - \alpha)^2 e^{a(\alpha + ik)}} \right)^2 \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-k^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{(\alpha + ik)^4 e^{-2a(\alpha - ik)} + (\alpha + ik)^2 (ik - \alpha)^2 e^{-a(\alpha - ik)} e^{a(\alpha + ik)} + (ik - \alpha)^4 e^{2a(\alpha + ik)}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-k^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{(\alpha + ik)^4 e^{-2a(\alpha - ik)} + (\alpha^2 + k^2)^2 e^{2ika} + (ik - \alpha)^4 e^{2a(\alpha + ik)}} \right|$$

Für die $(\alpha + ik)^4$ folgt mit Pascalschem Dreieck: $(\alpha + ik)^4 = \alpha^4 + 3\alpha^3 ik - 6\alpha^2 k^2 - 3\alpha ik^3 + k^4$, wobei wir die Eigenschaft $i^2 = -1$ ausgenutzt haben. Für $(\alpha - ik)^4$ folgt: $(\alpha - ik)^4 = \alpha^4 - 4ik\alpha^3 - 6k^2\alpha^2 + 4ik^3\alpha + k^4$, somit also insgesamt:

$$T = |\frac{-k^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{(\alpha^4 + 3\alpha^3 ik - 6\alpha^2 k^2 - 3\alpha ik^3 + k^4) e^{-2a(\alpha - ik)} + (\alpha^2 + k^2)^2 e^{2ika} + (\alpha^4 - 4ik\alpha^3 - 6k^2\alpha^2 + 4ik^3\alpha + k^4) e^{2a(\alpha + ik)}}|$$

Da ich keine Zeit habe diesen Term zu berechnen, aber der Weg ja zu erkennen ist, man kann nun indem man den Betrag berechnet, d.h. Real- und Imaginärteil quadrieren und wurzelziehen, das Ergebnis für T erhalten, für T folgt somit:

$$T = \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) + \left(\frac{V_0}{4E}\right) \cdot \sinh^2(\alpha a)}$$

(d)

Wir betrachten die Formel für die Tunnel- bzw. Transmissionswahrscheinlichkeit:

$$T = \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) + \left(\frac{V_0}{4E}\right) \cdot \sinh^2(\alpha a)}$$

Für eine sehr hohe und weite Potentialbarrieren gilt $V_0 \gg E, d.h. \frac{E}{V_0} \to 0$ und $a \to \infty$. Somit folgt also für den Ansatz für die genäherte Formel der Transmissionswahrscheinlichkeit $T_\approx$:

$$T_\approx = \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{1 + \left(\frac{V_0}{4E}\right) \cdot \left(\frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2}\right)^2}$$

wobei wir hier $\frac{E}{V_0} \to 0$ benutzt haben und nun auch noch nutzen können, dass $e^{-\alpha a}$ mit $a \to \infty$ gegen 0 geht und somit vernachlässigt werden kann, es folgt also, zusätzlich mit $1 - \frac{E}{V_0} = (V_0 - E) \frac{1}{V_0}$:

$$T_{\approx} = \frac{(V_0 - E)\,\frac{1}{V_0}}{1 + \frac{V_0}{4E} \cdot \frac{e^{2\alpha a}}{4}}$$

nun liefert umstellen:

$$T_{\approx} = \frac{16E\,(V_0 - E)}{V_0\left(\frac{16E}{e^{2\alpha a}} + V_0\right)} e^{-2\alpha a}$$

lassen wir nun den Term $16E \cdot e^{-2\alpha a}$ wegen $a \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, so folgt das gewünschte genäherte Ergebnis:

$$T_{\approx} = \frac{16E}{V_0^2}\,(V_0 - E) \cdot e^{(-2\alpha a)}$$

7.4 Tunneleffekt - Anwendung

Wir betrachten Protonen ${}_1^1H$ und Deuteronen ${}_1^2H$ (wobei wir die Deuteronen als Doppelprotonen annehmen, wobei dies jedoch realistisch gesehen nicht möglich ist, da sich die positiven Ladungen abstoßen würden und das Teilchen ${}_2^2H$ somit instabil wäre), die auf eine rechteckige Potentialbarriere der Höhe $V_0 = 10\,MeV$ treffen. Diese besitzt eine Breite von $a = 10^{-14}\,m$. Während die Energie der Teilchen $E = 3\,MeV$ betrage.

(a)

Wir betrachten die genäherte Formel, durch die $e - Funktion$ $e^{(-2\alpha a)}$, da diese negativ ist und die Masse in α vorkommt (d.h. ist $2\alpha a$ größer, so wir die $e - Funktion$ kleiner), tritt ein Verlust der Transmissionswahrscheinlichkeit ein.

Betrachten wir die exakte Formel, so sieht man, da wir nur ein α im Nenner besitzen, dass im Falle der Erhöhung des Terms durch ein größeres m die Wahrscheinlichkeit sinken muss. Daher müssen wir den $\left(\frac{V_0}{4E}\right) \cdot \sinh^2(\alpha a)$ Term betrachten. Für diesen folgt, dass bei höherem m der Term an sich größer wird. Dies kann man gut erkennen, wenn man die umgeschriebene Variante in e-Funktionen betrachtet $\left(\frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2}\right)^2$, da dann der eine e-Funktionen Term etwas kleiner ($e^{-\alpha a}$), der andere ($e^{\alpha a}$) jedoch größer wird und die Vergrößerung den Effekt der Energie überwiegt, womit wir insgesamt eine Senkung der Tunnelwahrscheinlichkeit auch für die exakte Definition erhalten.

Alternativ (bitte nicht bewerten, aber wenn Zeit und Lust korrigieren):

[Die Wahrscheinlichkeit für das Proton die Barriere zu überwinden ist höher. Es besitzt eine geringere Masse und Ausdehnung. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist höher als die des Deuteron und der Impuls des Deuteron ist höher, dies würde auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation für eine höhere Wahrscheinlichkeit des Deuterons sprechen, da die Ortsunschärfe auf Grund des höheren Impulses des Deuterons für diese größer ist. Bevor wir unsere Annahme begründen betrachten wir die Kinetischen Energie, wobei $E \approx E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ gilt, für das Proton folgt jedoch $\sqrt{\frac{2E}{m_p}} = v_p$,während für das

Deuteron $\sqrt{\frac{E}{m_p}} = v_d$ folgt. Somit ist die Geschwindigkeit des Protons um den Faktor $\sqrt{2}$ größer $\left(v_p = \sqrt{2} v_d\right)$. Für die Impulse folgen $p_p = m_p v_p$ und $p_d = 2 m_p v_d = \sqrt{8} m_p v_p$. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation ist somit die Ortsunschärfe des Deuterons größer als die des Protons, wie bereits oben erwähnt. Jedoch müssen wir nun noch die Wellenlängen der Teilchen betrachten, hierbei ist die Wellenlänge des Deuterons jedoch durch den größeren Impuls kleiner als die des Protons. Somit also die Wahrscheinlichkeit, dass das Proton durch die Barriere durch"ragt" höher, als die des Deuterons. Nun muss man die Effekte abwägen, wobei wir uns dafür entscheiden den Effekt der Wellenlänge als den Effekt mit dem größeren Einfluss zu sehen.]

(b)

Zur quantitativen Bestimmung nutzen wir die Formeln aus **Aufgabe 3**:

$$T = \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) + \left(\frac{V_0}{4E}\right) \cdot \sinh\left(\alpha a\right)}, \; mit \, \alpha = \frac{\sqrt{2m\left(V_0 - E\right)}}{\hbar}$$

bzw. die Näherungsformel:

$$T_{\approx} = \frac{16E}{V_0^2}\left(V_0 - E\right) \cdot e^{(-2\alpha a)}$$

Für das Proton folgt:

$$T_{^1H} = 3.02966 \cdot 10^{-5}$$

$$T_{^1H,\approx} = 3.02969 \cdot 10^{-5}$$

hierbei sieht man, dass die Näherung sehr gut in diesem Fall übereinstimmt, also durchaus benutzt werden darf.

Für das Deuteron folgt:

$$T_{^2H} = 2.46442 \cdot 10^{-7}$$

$$T_{^2H,\approx} = 2.46443 \cdot 10^{-7}$$

Die Näherung passt auch hier sehr gut.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit für das Proton um ca. 2 Größenordnungen höher liegt. Das die Wahrscheinlichkeit höher liegt entspricht den Erwartungen, wobei 2 Größenordnungen doch etwas überraschen, wenn man bedenkt, dass das Teilchen nur die doppelte Masse besitzt und wir dies als einziges Unterscheidungsmerkmal genutzt haben, da die Energien ja gleich groß waren.