Heiko Dumlich 5. Juni 2006

6 Übungsblatt zur Experimentalphysik III

6.1 Wasserstoff und Uran

Wir wollen den Bahnradius r und die Geschwindigkeit v eines Elektrons auf der ersten Bohr'schen Bahn berechnen. Hierfür betrachten wir die beiden Randbedingungen:

$$F_{zentripetal} = F_{Coulomb} \tag{1}$$

$$Bahnumfang = n \cdot \lambda \tag{2}$$

Für (1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mu v^2}{r} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \Rightarrow r &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2} \end{aligned}$$

mit $\mu = \frac{M_{Kern} m_e}{M_{Kern} + m_e}$ der reduzierten Masse. Gleichung (2) führt auf:

$$2\pi r = n\lambda \Leftrightarrow r = \frac{\hbar}{\mu v}$$

mit $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\mu v}$ der de-Broglie-Wellenlänge und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Wir können die Bedingungen für r gleichsetzen und erhalten:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = v \tag{3}$$

der Radius folgt für dieser Geschwindigkeit mit:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu Z e^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \mu Z e^2} \tag{4}$$

Für das Coulombpotential gilt:

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Die kinetische Energie wird durch:

$$T = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

beschrieben. Somit erhalten wir den Virialsatz:

$$V = -2T$$

(a)

Es folgt für das Wasserstoffatom mit der Kernladungszahl $Z_H = 1$, der Kernmasse von $m_H = m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}\,kg$ und der Elektronenmasse von $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,kg$ unter Verwendung von (4) und (3) :

$$r_H = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2} = 5.29 \cdot 10^{-11}\,m = 0.53\,\text{Å}$$

$$v_H = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.19 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$$

(b)

Das Uran besitzt eine Kernladungszahl von $Z_U = 92$, während die Masse $m_U = 238.03\,u = 3.953 \cdot 10^{-25}\,kg$ beträgt. Dies führt auf:

$$r_U = \frac{\epsilon_0 h^2}{92\pi \mu e^2} = 5.75 \cdot 10^{-13}\,m = 0.006\,\text{Å}$$

$$v_U = \frac{92 e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.01 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

Hierbei fällt auf, dass die Geschwindigkeit im relativistischen Bereich liegt und daher diese Aufgabe relativistisch zu rechnen ist. Wir gehen nun mit einem relativisitschen - anstatt klassischen - Ansatz für die Bedingung (2) ein:

$$2\pi r = n\lambda \Leftrightarrow r = \frac{\hbar}{\gamma \mu v} \tag{5}$$

da $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$, wobei $p = \gamma \mu v$ den relativistischen Impuls darstellt, mit $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Für die relativistisch gerechnete Geschwindigkeit folgt somit nachdem wir (1) und (5) gleichgesetzt haben:

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \\
0 &= v^4 - c^2 v^2 + c^2\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 \\
0 &= b^2 - c^2 b + c^2\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2
\end{aligned}$$

nun können wir die $pq-Formel$ benutzen, wobei wir $v^2 = b$ gesetzt haben (alternativ wäre auch eine Lösung durch ein numerisches Verfahren möglich, z.B. mit Mathematica, dieses liefert $v = 2.29543 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$):

$$b_{1,2} = \frac{c^2}{2} \pm \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2}$$

für die Geschwindigkeit folgt somit:

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2}{2} \pm \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2}}$$

Da wir für beide Fälle ein imaginäres Ergebnis erhalten, versuchen wir es beim Ausrechnen mit dem Betrag (dies ist unbegründet, jedoch ein Versuchsansatz, wobei wir sehen werden, dass das Ergebnis nicht mit dem numerischen übereinstimmt, somit also der Ansatz falsch ist), wobei dieser in beiden Fällen identisch ist:

$$|v| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

Für den Radius ergibt sich:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu\gamma^2 Ze^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi\gamma^2\mu Ze^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi\mu Ze^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Somit erhalten wir als relativistisch gerechnete Ergebnisse:

$$v = 2.46 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

$$v_{mathematica} = 2.30 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

$$r = 1.89 \cdot 10^{-13}\,m = 0.0019\,\text{Å}$$

$$r_{mathematica} = 2.38 \cdot 10^{-13}\,m = 0.0024\,\text{Å}$$

Hierbei ist darauf zu verweisen, dass das numerische Ergebnis mit dem Realteil $\Re$ des hergeleiteten Terms übereinstimmt.

(c)

Für die relativisitsche Massenzunahme des Elektrons gilt:

$$m_{elektron} = \gamma m_0$$

$$\Leftrightarrow m_{elektron} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_e$$

Wobei für die Ruhemasse des Elektrons $m_0 = m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,kg$ gilt. Nun besitzt das Elektron eine Geschwindigkeit von $v_H = 2.19 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$, somit folgt für die relativistische Massenzunahme:

$$m_{elektron,H} = 1.003 \cdot m_e = 9.110 \cdot 10^{-31}\,kg$$

Für das Elektron, das das Uran umkreist gilt:

$$m_{elektron,U} = 1.349 \cdot m_e = 12.284 \cdot 10^{-31}\,kg$$

Für die relativistische Energie folgt mit $E = mc^2 = E_{Kin} + m_0 c^2 \Rightarrow E_{kin} = (\gamma - 1)\,m_0 c^2 = (\gamma - 1)\,m_e c^2$:

$$E_{rel,H} = 2.18 \cdot 10^{-18}\,J = 13.61\,eV$$

Für die klassische Energie gilt $E = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$:

$$E_{klass,H} = 2.18 \cdot 10^{-18}\,J = 13.60\,eV$$

Für das Uran folgt:

$$E_{rel,U} = 2.86 \cdot 10^{-14}\,J = 178\,keV$$

$$E_{klassisch,U} = 1.85 \cdot 10^{-14}\,J = 115\,keV$$

Somit folgt für die Änderung:

$$\Delta E_H = 0.01\,eV$$

$$\Delta E_U = 63\,keV$$

Für die Verhältnisse folgt:

$$\frac{E_{rel,H}}{E_{klassisch,H}} = 1.0006$$

$$\frac{E_{rel,U}}{E_{klassisch,U}} = 1.55$$

6.2 Auflösbarkeit der Balmerserie

Wir betrachten die Balmerserie mit einem Gitterspektrographen dem spektralen Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^5$. Wir bestimmen die Energie E_n, bis zu der noch zwei benachbarte Strahlen aufgelöst werden können. Hierzu bestimmen wir zunächst n die Nummer des letzten Strahls, der aufgelöst werden kann ohne von einem anderen überlagert zu werden. Die Energie E_n ist definiert als:

$$E_n = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

Während für den "Übergang" von einem Energieniveau m zum Energieniveau n :

$$E_{mn} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

gilt, wobei $m = n_{initial}$ und $n = n_{final}$. Wir betrachten die Energie, die beim letzten auflösbaren Übergang freigesetzt wird und den Balmer-Übergang:

$$\Delta E = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \tag{7}$$

$$E_{2n} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{8}$$

Für unsere Auflösbarkeit gilt, da wir als Tipp zu **Aufgabe 4** die Näherung $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta\nu}{\nu}$ erhalten haben:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{E_{2n}}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E_{2n}}$$

Nun können wir dies nutzen um das gesuchte n zu bestimmen, hierzu setzen wir (7) und (8) ein:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}$$

Wir kürzen und vereinfachen:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\left(\frac{n^2-4}{4n^2}\right)}{\left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)}$$

umstellen liefert:

$$0 = \frac{\left(n^2-4\right) n^2 (n+1)^2}{(2n+1)\, 4n^2} - \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

hieraus folgt:

$$0 = \frac{n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 4\,(2n+1)}{(2n+1)\,4} - \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Dies führt mit einsetzen von $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^5$ auf die numerisch lösbare Gleichung:

$$0 = \frac{n^4 + 2n^3 - 3n^2}{(2n+1)\,4} - 1 - 5 \cdot 10^5$$

Für diese folgt als Ergebnis mit Mathematica:

$$n = 158.25$$

Somit ist der letzte auflösbare Übergang also $157 \to 158$. Nun berechnen wir noch die Energie E_n über (6) mit $n = 158$, es folgt:

$$E_{158} = 5.60 \cdot 10^{-26}\,J = 3.50 \cdot 10^{-7}\,eV$$

6.3 Wellenpaket

Wir betrachten ein Wellenpaket mit der Verteilung $A\,(k)$ der Wellenzahlen:

$$A\,(k) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(k^2 + \alpha^2)}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Zu berechnen ist die Einhüllende des Paketes zum Zeitpunkt $t = 0$. Wir betrachten den allgemeinen Ansatz:

$$\psi\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A\,(k)\, e^{i(kx - \omega t)}$$

nun können wir unsere Randbedingungen einsetzen und mit $t = 0$ vereinfacht sich der Term zu:

$$\psi\,(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{1}{(k^2 + \alpha^2)} e^{ikx}$$

Wir nutzen die Eulersche Identität $e^{ik} = \cos k + i \sin k$:

$$\psi\,(x) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{1}{(k^2 + \alpha^2)} \cos xk + i \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{1}{(k^2 + \alpha^2)} \sin xk \right]$$

Hierbei verschwindet der zweite Term (Imaginärteil), aus Symmetriegründen ($\sin xk$ ist antisymmetrisch und k^2 ist symmetrisch). Wir erhalten die vereinfachte Funktion:

$$\psi\,(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\cos xk}{(k^2 + \alpha^2)} \tag{9}$$

Mathematica liefert als Ergebnis:

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\pi e^{-x\sqrt{\alpha^2}Sign(x)}}{\sqrt{\alpha^2}}\right) = e^{-|\alpha|x\cdot Sign(x)} = e^{-|\alpha x|}$$

Alternativ können wir auch bei (9) substituieren. Nachdem wir umgeformt haben zu:

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\cos xk}{\left(1+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)}$$

substituieren wir $\xi = \frac{k}{\alpha} \Rightarrow \frac{d\xi}{dk} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha d\xi = dk$, so folgt(Grenzen bleiben erhalten):

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\frac{\cos\alpha x\xi}{(1+\xi^2)}$$

wobei der cos eine gerade Funktion ist, und somit können wir schreiben:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\xi\,\frac{\cos\alpha x\xi}{(1+\xi^2)}$$

Dieses Integral lässt sich nun im Bronstein finden:

$$\int_0^{\infty} dx\,\frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$$

Anwendung auf unser Integral liefert:

$$\psi(x) = e^{-|\alpha x|}$$

Die qualitativen Graphen für die ursprüngliche Funktion $A(k)$ und die Einhüllende $\psi(x)$ können im Anhang gefunden werden.
Wir benutzen als Abschätzung $\frac{1}{\sqrt{2}}$, somit folgt:

$$\Delta k = 2\alpha\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$\Delta x = -\frac{2}{\alpha}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dies führt auf:

$$\Delta k\cdot\Delta x = \frac{-4\alpha\sqrt{\sqrt{2}-1}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}{\alpha} = -4\sqrt{\sqrt{2}-1}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.89 \approx 1$$

6.4 Unschärferelation

(a)

Wir betrachten die Lebensdauer eines $\rho^- - Mesons$, mit einer Energieunschärfe von $\Delta E = 151.2\,MeV = 2.422 \cdot 10^{-11}\,J$. Es gilt die Beziehung:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Es folgt:

$$\Delta \tau = \frac{\hbar}{2\Delta E} = 2.18 \cdot 10^{-24}\,s$$

(b)

Es gilt wiederum $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, zudem können wir die Abschätzung $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ nutzen. Somit gilt nach umformen:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\nu\lambda^2}{c}$$

wobei wir $\nu = \frac{c}{\lambda}$ verwendet haben. Nun gilt jedoch auch $\Delta E = h\Delta\nu \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{h} = \Delta\nu$, dies können wir einsetzen:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta E\lambda^2}{hc}$$

Nun können wir noch aus unserer Abschätzung $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}$ verwenden, somit folgt:

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c\Delta t}$$

wir können die Werte einsetzen und erhalten:

$$\Delta\lambda \geq 6.63 \cdot 10^{-15}\,m$$

Wir setzen also:

$$\Delta\lambda = 6.63 \cdot 10^{-15}\,m$$

(c)

Zu bestimmen ist die spektrale Bandbreite $\Delta\lambda$ eines Femto-Sekunden Laserpulses mit der Dauer $t = 10^{-15}\,s$ für die Wellenlänge $\lambda = 500\,nm$. Mit:

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c\Delta t}$$

folgt für die spektrale Bandbreite:

$$\Delta\lambda \geq 6.63 \cdot 10^{-8}\,m$$

Somit folgt also:

$$\Delta\lambda = 66.3\,nm$$