Experimentalphysik III, Übungsblatt 5

Heiko Dumlich

27. Mai 2006

1.

siehe mathematica printout (Anhang)

2.

(a)

Für ein Elektron, das durch eine Spannung V auf relativistische Geschwindigkeit beschleunigt wird, gilt:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e\, eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_e c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Dies folgt aus dem Ansatz:

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

und

$$E = E_0 + E_{Kin}$$

mit $E_0 = m_e c^2$, $E_{Kin} = eV$ (in diesem Fall, da ein **Elektron** mit V beschleunigt wird) und $p = \frac{h}{\lambda}$. Wir quadrieren die zweite Gleichung und erhalten:

$$E^2 = E_0^2 + 2E_0E_{Kin} + E_{Kin}^2$$

nun können wir E^2 einsetzen und erhalten:

$$E_0^2 + 2E_0E_{Kin} + E_{Kin}^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

hier kürzt sich das E_0^2 und wir können für den Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$ einsetzen um:

$$E_{Kin}\left(2E_0 + E_{Kin}\right) = \frac{h^2c^2}{\lambda^2}$$

zu erhalten. Umstellen nach λ liefert nun:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_{Kin}\left(2E_0 + E_{Kin}\right)}}$$

Nun formen wir noch geschickt um, um die gleiche Struktur wie vom gewünschten Ergebnis zu erhalten:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2E_0 E_{Kin}\left(1 + \frac{E_{Kin}}{2E_0}\right)}}$$

Nun setzen wir ein und erhalten:

$$\lambda = \frac{hc}{c\sqrt{2m_e\, eV\left(1 + \frac{eV}{2m_e c^2}\right)}}$$

Nun kürzen wir noch das c und stellen um, um den gewünschten Term zu erhalten:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e\, eV}}\left(1 + \frac{eV}{2m_e c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(b)

Für den nicht-relativistischen Fall gilt:

$$v \ll c \Leftrightarrow \frac{v}{c} \to 0$$

Somit gilt aber zugleich:

$$\frac{E_{Kin}}{E_0} \to 0$$

setzen wir diese Bedingung in unsere hergeleitete Gleichung ein, so folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e\, eV}}$$

Für den ultra-relativistischen Fall gilt:

$$v \approx c \Leftrightarrow \frac{v}{c} \approx 1$$

Somit folgt aber:

$$E_{Kin} \gg E_0 \to \frac{E_{Kin}}{E_0} \gg 1$$

Nutzen wir dies in unserer Gleichung, so folgt für den Term $\left(1 + \frac{E_{Kin}}{2E_0}\right) \rightarrow \frac{E_{Kin}}{2E_0}$, setzen wir dies ein, folgt:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e \left(E_{Kin}\right)^2 \frac{1}{2m_e c^2}}}$$

nun kürzen sich die $2m_e$ und wir können c aus der Wurzel ziehen um:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{Kin}}$$

zu erhalten. Die gesamte Energie kann in diesem Fall, da das Elektron sich mit ultra-relativistischer Geschwindigkeit bewegt, als der kinetischen Energie gleich angenommen werden. Somit folgt:

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

wie gefordert.

(c)

Für das Photon erhalten wir in der doppellogarithmischen Auftragung eine Gerade, wie aus der Formel nicht anders zu erwarten ist. Für die Auftragung des Elektrons jedoch ereignet sich ein Knick in der Graphik. Zudem kann man "verschiedene" Stadien der Betrachtung errechnen, je nachdem könnte man eine andere Formelnäherung zur Berechnung verwenden, so ist das Elektron ab $5.1 \cdot 10^5\,eV$ relativistisch zu betrachten und ab $3.6 \cdot 10^6\,eV$ sogar ultra-relativistisch. Wobei die ultra-relativistische Betrachtung das Elektron dem Photon fast gleich setzt, da bei $10\,GeV$ das Elektron nur noch zu ca. $2 \cdot 10^{-7}\%$ von der Lichtgeschwindigkeit abweicht, sind die Enden der Graphen im Bereich der Auflösbarkeit sogar identisch. (Graphen siehe Anhang - mathematica printout)

3.

Zu berechnen ist die de-Broglie-Wellenlänge für ein thermisches Neutron bei Zimmertemperatur ($300\,K$) und für ein C_{60}-Molekül mit der Geschwindigkeit $v_{C_{60}} = 200\,\frac{m}{s}$. Für die de-Broglie-Wellenlänge gilt:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

wobei h für das Plancksche Wirkungsquantum $\left(h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s\right)$ und p für den Impuls steht. Für den Impuls gilt $p = mv$. Für die mittlere thermische Energie gilt $\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}kT$, mit T der Temperatur und k der Boltzmannkonstanten $\left(k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}\right)$. Somit folgt mit $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$, wobei $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$

(Masse des Neutrons), für die Geschwindigkeit des Neutrons aus der mittleren thermischen Energie, die wir mit der kinetischen Energie gleichsetzen:

$$v_n = \sqrt{\frac{3kT}{m_n}}$$

Dies führt auf einen Zahlwert von:

$$v_n = 2727\,\frac{m}{s} \Rightarrow p_n = m_n v_n = 4.6 \cdot 10^{-24}\,\frac{kg \cdot m}{s}$$

Für die de-Broglie-Wellenlänge folgt somit:

$$\lambda_{dB,n} = 1.45 \cdot 10^{-10}\,m$$

Thermische Neutronen besitzen (nach Wikipedia) eine Wellenlänge zwischen $\lambda_{n,thermisch} = 0.9 - 6.4\,\text{Å}$. Dies stimmt mit dem gefundenen Ergebnis überein.

Für das C_{60} Fulleren, folgt eine Masse von $m_{C_{60}} \approx 720\,u$, wobei ein $u = 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg$. Somit folgt also eine Masse von ca. $m_{C_{60}} = 1.20 \cdot 10^{-24}\,kg$. Für den Impuls folgt somit $p_{C_{60}} = 2.40 \cdot 10^{-22}\,\frac{kg \cdot m}{s}$. Für die de-Broglie-Wellenlänge folgt somit:

$$\lambda_{dB,C_{60}} = 2.77 \cdot 10^{-12}\,m$$

Somit ist die Wellenlänge des Fullerens mit $v_{C_{60}} = 200\,\frac{m}{s}$ kürzer als die des thermischen Neutrons.

4.

Der Abstand zweier Gitterebenen im Kaliumchlorid beträgt $d = 3.14 \cdot 10^{-10}\,m$, Wir vergleichen den Bragg-Winkel für die Reflektion 1. Ordnung von Elektronen und Photonen, jeweils mit einer kinetischen Energie von $E_{kin} = 40\,keV$. Wir nutzen hierzu unsere Formeln aus **Aufgabe 2**:

$$\lambda_{Elektron} = \frac{h}{\sqrt{2m_e\,eV}}\left(1 + \frac{eV}{2m_ec^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_{Photon} = \frac{hc}{E_{Kin}}$$

Wir können die kinetische Energie in $Joule$ umrechnen und erhalten $E_{kin} = 40 \cdot 1.602 \cdot 10^{-16}\,J = 6.408 \cdot 10^{-15}\,J$. Nun besitzen wir nur noch bekannte Werte und können die Wellenlängen für Photon und Elektron bestimmen, es ergibt sich:

$$\lambda_{Elektron} = 6.02 \cdot 10^{-12}\,m$$

$$\lambda_{Photon} = 3.10 \cdot 10^{-11}\, m$$

Für die Bragg-Bedingung gilt:

$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

Wobei $n = 1$, da wir die erste Ordnung betrachten und d der Abstand zweier Gitterebenen ist. Nun können wir das jeweilige λ einsetzen und θ über:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right)$$

bestimmen. Somit ergeben sich:

$$\theta_{Elektron} = 0.55^\circ$$

$$\theta_{Photon} = 2.83^\circ$$

für die Braggwinkel des Elektrons und Photons. Das heisst, es liegt ungefähr ein Faktor 5 zwischen diesen.

5.

Wir skizzieren die drei Ebenen: