Experimentalphysik III, Übungsblatt 4

Heiko Dumlich

21. Mai 2006

1.

Wir betrachten die Compton-Streuung von Synchrotronstrahlung $(h\nu = 8\,keV)$ an He und $\gamma-Strahlung$ $\left(\lambda_2 = 1.88 \cdot 10^{-12}\,m\right)$ einer radioaktiven $^{137}Cs-Probe$ an Graphit. Für den Streuwinkel soll in beiden Fällen $\varphi = 90°$ gelten. Für die Compton-Streuung gilt:

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

wobei $\lambda_c = 2.43 \cdot 10^{-12}\,m$ die Comptonwellenlänge beschreibt.

(a)

Wir betrachten zuerst die Verschiebung der Wellenlängen durch die Comptonstreuung. Wir betrachten die Formel von oben und können schreiben:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$$

da die vorherige Wellenlänge addiert um den Änderungsfaktor die neue Wellenlänge ergeben muss. Somit gilt also für die Verschiebung der Wellenlänge $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot 2 \cdot 0.5 = \lambda_c$$

Die Verschiebung entspricht also für einen Streuwinkel von $\varphi = 90°$ gerade der Comptonwellenlänge λ_c und ist somit nicht von der ankommenden Wellenlänge oder dem Material, an dem gestreut wird, abhängig.

(b)

Um die Energie des ionisierten Elektrons zu berechnen, gehen wir von der Einstein-Beziehung aus, hierbei gilt $E = h\nu$. Für unseren Fall folgt nun $h\nu = h\nu' + E_{kin} + E_b$, wobei $h\nu$ die Energie des Photons vor dem Stoß, $h\nu'$ die Energie des Photons nach dem Stoß, E_{kin} die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß und E_b die Bindungsenergie des Elektrons darstellt, wobei wir diese vernachlässigen können, da sie nur einige eV beträgt und die auftretenden

Energien um ein paar Größenordnungen größer sind. Für unsere Beziehung folgt somit, nach umstellen:

$$E_{kin} = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda)$$

Nun können wir die kinetische Energie des ionisierten Elektrons bestimmen, welche zugleich die gesamten Energie des Elektrons darstellt. Für die Synchrotronstrahlung erhalten wir eine Wellenlänge von $\lambda_1 = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E}$, wobei $E = 8\,keV = 1.28 \cdot 10^{-15}\,J$ gilt, also folgt $\lambda_1 = 1.55 \cdot 10^{-10}\,m$ und $\lambda_1' = 1.57 \cdot 10^{-10}\,m$.

Somit folgt für die kinetische Energie des Elektrons aus der Compton Streuung an He:

$$E_{kin,He} = 1.62 \cdot 10^{-17}\,J = 101\,eV$$

Für die kinetische Energie des Elektrons aus der Compton Streuung mit Graphit folgt mit $\lambda_2' = 4.31 \cdot 10^{-12}\,m$:

$$E_{kin,graphit} = 5.96 \cdot 10^{-14}\,J = 3.72 \cdot 10^{5}\,eV = 372\,keV$$

Somit liegt also die kinetische Energie des im zweiten Prozess gestoßenen Elektrons viel höher (ca. 3 Größenordnungen) als die des im ersten Prozess gestoßenen Elektrons.

(c)

Der Energieverlust des Photons berechnet sich über die Betrachtung von $h\nu = h\nu' + E_{kin}$, wobei wird für den Energieverlust des gestreuten Photons δE schreiben, nach umstellen erhalten wir:

$$\delta E = 1 - \frac{h\nu'}{h\nu} = 1 - \frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{E_{kin}}{h\nu}$$

Somit folgt für den ersten Prozess mit $\frac{E_{kin}}{h\nu}$:

$$\delta E_1 = 0.0126$$

Für den zweiten Prozess folgt mit $1 - \frac{\lambda}{\lambda'}$:

$$\delta E_2 = 0.5638$$

dies entspricht $\delta E_1 = 1.26\%$ und $\delta E_2 = 56.38\%$. Somit kann man also sagen, dass das Photon beim ersten Prozess nur ca. 1% seiner Energie verliert, während das Photon im zweiten Prozess mit ca. 56% über die Hälfte seiner Energie abgibt. Dies ist in dem Sinne erstaunlich, da die Verschiebung der Wellenlänge identisch und der Streuwinkel identisch sind. Jedoch zeigt dies auch, dass der Streuwinkel mit der Wellenlängenverschiebung korreliert ist, jedoch eine Aussage, nur auf Grund der Kenntnis des Streuwinkels, über die Energie bei zwei verschiedenen Stoßprozessen, trotz gleichem Streuwinkel, nicht möglich ist.

2.

Wir weisen nach, dass ein freies Elektron kein Photon absorbieren kann, wobei wir die Anfangsenergie des Elektrons als 0 annehmen, es sich also "in Ruhe" befindet, dies spart uns ein paar Terme beim rechnen, beeinflusst das Problem jedoch nicht weiter. Hierzu betrachten wir den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz, die beide erfüllt sein müssen. Es gilt:

$$E_{photon} = E_{elektron}$$

für den Energieerhaltungssatz, da die Energie des Photons vollständig auf das Elektron übertragen werden müsste. Zudem muss nach dem Impulserhaltungssatz:

$$\vec{p}_{photon} = \vec{p}_{elektron}$$

gelten. Für das Photon gilt nun $E_{photon} = h\nu$ und $|\vec{p}_{photon}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, während für das Elektron $E_{elektron} = m_e c^2 (\gamma - 1)$ und $|\vec{p}_{elektron}| = m_e v\gamma$ gilt. Wir setzen nun die Gleichungen für EES und IES ein und erhalten:

$$h\nu = m_e c^2 (\gamma - 1)$$

$$\frac{h\nu}{c} = m_e v\gamma$$

Umstellen und Gleichsetzen, liefert sofort:

$$h\nu = m_e vc\gamma = m_e c^2 (\gamma - 1)$$

und somit folgt nach kürzen $\left(\gamma := \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$:

$$\sqrt{c^2 - v^2} = c - v$$

Wir quadrieren und erhalten:

$$c^2 - v^2 = c^2 - 2cv + v^2$$

somit folgt:

$$c = v$$

Da das Elektron jedoch eine Ruhemasse besitzt $m_e \neq 0$, kann es c nur erreichen, wenn es unendlich Energie besitzen würde. Daher kann ein freies Elektron entweder nur alle Energie des Universums auf einmal und noch unendlich mehr absorbieren oder gar keine Energie. Da niemals der Fall eintreten wird, dass dem Elektron unendlich Energie in Form eines Photons angeboten wird, können wir diesen Fall ausschließen und erhalten das gewünschte Ergebnis. Es ist gezeigt, dass ein freies Elektron kein Photon absorbieren kann.

3.

Wir betrachten die relativisitsche Compton-Streuung in dieser Aufgabe als nicht relativistisch und betrachten in wie weit dies eine Änderung des Streuwinkels verursacht.

Wir berechnen zunächst den relativistischen Energieverlust für die Mo $K\alpha$-Linie, wobei die Streuung $\varphi = 135°$ beträgt und das Photon eine Wellenlänge von $\lambda = 0.7093 \cdot 10^{-10}\, m$ besitzt, wir setzen die Formel für die Compton-Streuung an:

$$\lambda' = \lambda + 2 \cdot \lambda_c \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Hierbei gilt $\lambda_c = 2.43 \cdot 10^{-12}\, m$. Einsetzen liefert $\lambda' = 7.09 \cdot 10^{-11}\, m + 4.14 \cdot 10^{-12}\, m = 7.51 \cdot 10^{-11}\, m$. Somit folgt für die Energie $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ bzw. genauer für den Energieverlust $\Delta E = E - E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda) = 0.16 \cdot 10^{-15}\, J$.

Für den $\gamma - Strahlers$ aus **Aufgabe 1** folgt unter dem gleichen relativitischen Streuwinkel von $\varphi = 135°$, mit $\lambda = 1.88 \cdot 10^{-12}\, m$ und $\lambda' = 1.88 \cdot 10^{-12}\, m + 4.14 \cdot 10^{-12}\, m = 6.02 \cdot 10^{-12}\, m$ ein Energieverlust von $\Delta E_\gamma = 7.27 \cdot 10^{-14}\, J$.

Wir leiten die Formel für die nicht-relativistische Compton-Streuung her, hierzu betrachten wir die Energie- und Impulserhaltung. Es gilt $E_{photon} = E_{photon'} + \Delta E$, wobei $\Delta E = E_{elektron}$, also die Energie, die dem Photon verloren geht wird vollständig auf das Elektron übertragen ($als\, kinetische\, Energie$). Wir vernachlässigen die Bindungsenergie des Elektrons, also $E_b \approx 0$. Zudem gilt nach dem Impulserhaltungssatz $\vec{p}_{photon} = \vec{p}_{photon'} + \vec{p}_{elektron}$. Wir haben hierbei das Elektron als -vor dem Stoß- ruhend angenommen, daher existiert kein Impuls vor dem Stoß. Für den Photonenimpuls gilt $|\vec{p}_{photon}| = \left|\hbar\vec{k}\right| = \frac{h}{\lambda}$, für den Elektronenimpuls $|\vec{p}_{elektron}| = mv$, für die Energie des Photons $E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ und für die kinetische Energie des Elektrons $E_{elektron} = \frac{1}{2}mv^2$. Setzen wir nun alles ein erhalten wir:

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + m\vec{v}$$

Wenn wir uns eine Zeichnung vom Stoßprozess machen, so sehen wir, dass wir den Cosinussatz anwenden können und erhalten:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi$$

Für den ersten Term können wir nun auch schreiben:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2$$

dies entspricht aber auch:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2m}(mv)^2$$

Nun können wir in den Energieerhaltungssatz $(mv)^2$ aus dem Impulserhaltungssatz einsetzen und erhalten:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi\right)$$

wir formen um und erhalten:

$$2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi$$

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2}\right) - mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi$$

$$\frac{\lambda\lambda'}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2}\right) - \frac{mc\lambda\lambda'}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \cos\varphi$$

Somit folgt für den nicht-relativistischen Streuwinkel:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{mc}{h}(\lambda - \lambda') + \frac{1}{2\lambda\lambda'}\left(\lambda'^2 + \lambda^2\right)\right)$$

Somit haben wir ein nur noch von λ, λ' und bekannten Konstanten abhängendes φ, wodurch wir also den nicht-relativisitschen Winkel bestimmen können.

Für den nicht-relativistischen Winkel für den historischen Versuch von Compton folgt $\varphi = 134.9°$.

Für dieselbe Rechnung erhalten wir ein Ergebnis für den $\gamma - Strahler$ von $\varphi = 87.2°$.

Hierbei fällt auf, das die nichtrelativistische Rechnung für den historischen Versuch fast ein äquivalentes Ergebnis liefert, während die Rechnung für den $\gamma - Strahler$ doch eine erhebliche Abweichung (fast um die Hälfte) liefert.

4.

Für das Lambert-Beer-Gesetz gilt:

$$I(d) = I_0 e^{-\sigma n d}$$

wobei σ den Wirkungsquerschnitt, n die Teilchenzahldichte und d die im Medium zurückgelegte Strecke bezeichnet. Es gilt $\sigma n = \frac{1}{\lambda}$, wobei λ die freie Weglänge bezeichnet. Wir betrachten nun die allgemeine Gasgleichung:

$$pV = NRT$$

wobei p den Druck, V das Volumen, N die Molanzahl, $R = N_A k_B$ die allgemeine Gaskonstante, bestehend aus N_A der Avogadrokonstanten und k_B der Boltzmannkonstanten, und T die Temperatur beschreibt. Wir betrachten ein Mol, also $N = 1$, somit folgt:

$$pV = RT$$

Nun gilt allgemein für die Teilchenzahldichte:

$$\frac{N}{V} = n$$

wobei N die Anzahl der Teilchen und V das Volumen bezeichnet. Für die Anzahl der Teilchen betrachten wir die Avogadrokonstante $N = N_A$. Wir fügen nun das Volumen aus der allgemeinen Gasgleichung in unsere Gleichung für die Teilchenzahldichte ein und erhalten:

$$n = \frac{N_A p}{N_A k_B T} = \frac{p}{k_B T}$$

Somit können wir die Teilchenzahldichte für bestimmte Bedingungen bestimmen.

Für den Fall des Ozons mit $p = 10^{-3}\,mbar = 0.1\,Pa = 0.1\,\frac{N}{m^2}$, der Boltzmann-Konstanten $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ und einer Temperatur von $T = 273.15\,K$ gilt $n_{O_3} = 2.65 \cdot 10^{19}\,\frac{O_3-Molekuele}{m^3}$. Wir können dies nun in das Lambert-Beer-Gesetz einsetzen und erhalten mit $\sigma_{O_3} \cdot n_{O_3} = 0.03\,\frac{1}{m} = \frac{1}{\lambda}$ (für die freie Weglänge gilt also $\lambda = 33.7\,m$):

$$I_{O_3}(d) = I_0 e^{-\left(0.03\,\frac{1}{m}\right)\cdot d}$$

Für eine Abschwächung bis auf 10% folgt also:

$$0.1 = e^{-\left(0.03\,\frac{1}{m}\right)\cdot d}$$

somit also, nach logarithmieren und kürzen durch “$-0.03\,\frac{1}{m}$”:

$$d_{O_3} = 76.8\,m$$

Leider lässt uns dies keine gute Aussage darüber treffen, wie gut wir von unserer Ozonschicht geschützt werden, da die genaue Dicke der Schicht stark variiert und nach Wikipedia im Falle von Normaldruck $p = 1013.25\,mbar$, wenn wir das Ozon direkt auf die Erdoberfläche auftragen würden nur eine $3\,mm$

dicke Schicht entstehen würde. Für die Rechnung mit Normaldruck erhalten wir $d_{O_3} \approx 7.6 \cdot 10^{-5}\,m \approx 0.08\,mm$ für den Intensitätsabfall auf 10%. Nun ist noch zu beachten, dass es verschiedenen Druck und auch verschiedene Temperaturen in verschiedenen Höhen gibt, wobei in Höhe der Ozonschicht (ca. $12 - 50\,km$ Höhe) eine Temperatur von ca. $-50°$ bis $0°$ herrscht.

Nun betrachten wir die Röntgenstrahlung, wobei diese durch Luft unter Normalbedingungen abgeschwächt wird. Wir können näherungsweise annehmen, dass Luft nur aus Stickstoff bestehen würde. Wir nähern ferner die Wirkungsquerschnitte von Luft durch die Wirkungsquerschnitte von atomaren Stickstoff. Hierbei betrachten wir die 3 einfließenden Effekte mit $\sigma_{pE} = 2.02 \cdot 10^{-28}\,\frac{m^2}{Atom}$ für den photoelektrischen Effekt, $\sigma_{RS} = 0.86 \cdot 10^{-28}\,\frac{m^2}{Atom}$ für die "Rayleigh"-Streuung und $\sigma_{CS} = 3.97 \cdot 10^{-28}\,\frac{m^2}{Atom}$ für die Compton-Streuung. Wir berechnen zunächst die Teilchendichte, wobei wir von 100% Stickstoff-Molekülen in der Luft ausgehen, somit kann man den Wirkungsquerschnitt in einer sehr groben Abschätzung verdoppeln. Hierbei werden mögliche Querschnittsverzerrungen etc. vernachlässigt. Für die Teilchenzahldichte folgt jedoch mit Normalbedingungen $T = 273.15\,K$ und $p = 1013.25\,mbar = 1.01 \cdot 10^5\,Pa = 1.01 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$ somit $n_{N_2} = 2.68 \cdot 10^{25}\,\frac{Molekuele}{m^3}$. Somit folgt nun mit $\sigma_N = \sigma_{pE} + \sigma_{RS} + \sigma_{CS} = 6.85 \cdot 10^{-28}\,\frac{m^2}{Atom}$ und $\sigma_{N_2} = 2\sigma_N = 1.37 \cdot 10^{-27}\,\frac{m^2}{Atom}$ ein $\sigma_{N_2} \cdot n_{N_2} = 0.04\,\frac{1}{m} = \frac{1}{\lambda}$, wobei die mittlere freie Weglänge $\lambda = 27.2\,m$ beträgt. Somit folgt mit dem Lambert-Beer-Gesetz:

$$I_{O_3}(d) = I_0 e^{-\left(0.04\,\frac{1}{m}\right) \cdot d}$$

für die Intensitätsabschwächung bis auf 10%:

$$0.1 = e^{-\left(0.04\,\frac{1}{m}\right) \cdot d}$$

nach logarithmieren und kürzen durch "$-0.04\,\frac{1}{m}$" folgt:

$$d_{N_2} = 57.6\,m$$

Somit folgt also für die zurückgelegte Strecke im Medium, bis die Intensität auf 10% abgefallen ist $d_{N_2} = 57.6\,m$.