Experimentalphysik III, Übungsblatt 3

Heiko Dumlich

14. Mai 2006

1.

Es gelten die folgenden Formeln:

$$u(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1}\, d\nu$$

für das Plancksche Strahlungsgesetz,

$$R_{nm} = u(\nu_{nm}, T)\, B_{nm} N_n$$

$$R_{mn} = (A_{mn} + u(\nu_{nm}, T)\, B_{mn})\, N_m$$

für die Raten (Übergänge pro Zeit), wobei $N_{n/m}$ die Anzahl der Atome im jeweiligen Niveau n/m beschreibt,

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V\, d\nu$$

für die Modenzahl in Abhängigkeit der Frequenz und

$$R_{nm} = R_{mn}$$

für den Gleichgewichtszustand. Wir betrachten die zwei Energieniveaus, wobei $n < m$ gelten soll. Somit gilt B_{nm} als Absorption, während B_{mn} die spontane Emission darstellt. Die induzierte Emission ist somit A_{mn}. Wir vergleichen die spontane Emission B_{mn} mit der induzierten Emission A_{mn}. Hierzu betrachten wir die Raten im Gleichgewicht:

$$u(\nu_{nm}, T)\, B_{nm} N_n = R_{nm} = R_{mn} = (A_{mn} + u(\nu_{nm}, T)\, B_{mn})\, N_m$$

Es gilt nun zudem:

$$N_m = e^{\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right)} N_n = e^{\left(-\frac{\nu_{mn}}{kT}\right)} N_n$$

somit folgt nach kürzen durch N_n:

$$u\left(\nu_{nm},T\right)B_{nm}=\left(A_{mn}+u\left(\nu_{nm},T\right)B_{mn}\right)e^{\left(-\frac{\nu_{mn}}{kT}\right)}$$

Wir stellen um und erhalten:

$$u\left(\nu_{nm},T\right)\left(B_{nm}-B_{mn}e^{\left(-\frac{\nu_{mn}}{kT}\right)}\right)=A_{mn}$$

nach teilen und einsetzen der Planckformel folgt:

$$u\left(\nu_{nm},T\right)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}-1}=\frac{A_{mn}}{\left(B_{nm}-B_{mn}e^{\left(-\frac{\nu_{mn}}{kT}\right)}\right)}$$

Vergleich mit der Planckformel liefert:

$$B_{nm}=B_{mn}$$

Da sonst die Gleichung nicht erfüllt werden kann. Zudem ergibt sich somit für das Verhältnis der spontanen zur indzuzierten Emission durch umstellen und kürzen des $\frac{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}-1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}-1}$ Terms:

$$C_{mn}=\frac{A_{mn}}{B_{mn}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

Man erkennt sofort die Frequenzabhängigkeit des Terms, wobei diese stark ist, da sie in der 3. Potenz vorliegt. Wir vergleichen nun das Verhältnis der induzierten zur spontanen Emission C_{mn} mit der mittleren Photonenzahl $\bar{n}$ einer Mode der Frequenz ν. Für die mittlere Photonenzahl $\bar{n}$ für die Temperatur $T \approx 10^2\,K$ und der Frequenz $\nu \approx 10^{12}\,s^{-1}$ gilt $\bar{n} \approx 1$. Für diese Randbedingungen folgt für unseren Term $C_{mn} = 618.1 \cdot 10^{26}\,\frac{kg}{m \cdot s}$. Wir betrachten einen zweiten Term mit viel höherer Frequenz $\nu \approx 10^{15}$, somit folgt $T \approx 10^5\,K$ um auf eine mittlere Photonenzahl von $\bar{n} \approx 1$ zu kommen. Für C_{mn}folgt somit $C_{mn} = 618.1 \cdot 10^{35}\,\frac{kg}{m \cdot s}$. Nun betrachten wir noch eine niedrige Frequenz $\nu \approx 10^8$ mit $T \approx 1\,K$, diesmal erhalten wir ein $\bar{n} \approx 10^2$ und für unser $C_{mn} = 618.1 \cdot 10^{14}\,\frac{kg}{m \cdot s}$. Für mich ergibt sich hieraus leider keine klar zu schlussfolgernde Erkenntnis. Es wäre nett, wenn im Tutorium hierüber noch ein paar Worte gesagt werden könnten, da mir der Zusammenhang nicht ganz klar ist.

Als möglichen Grund , warum es den Maser vor dem Laser gab, würde ich vermuten, dass es purer Zufall war, denn Forschung geht niemals "straightforward" nach einem "master-plan" vor. Es sind oft Zufälle die neue Erkenntnisse bringen und oft treten unerwartete Effekte auf, die dann zu einer neuen Sicht der Dinge führen. Die Realisierung lässt sich evtl. auch mit den damals vorhandenen technischen Möglichkeiten begründen, da die nötige Populationsinversion zur Erzeugung von Wellenlängen für den Mikrowellenbereich vermutlich leichter herzustellen waren, als für sichtbares Licht der Laser.

2.

Für den Impuls eines Photons gilt aus der Relativitätstheorie $E^2 = p^2c^2 + (mc)^2$, da jedoch die Ruhemasse das Photons 0 ist, folgt: $E = pc \Rightarrow h\nu = pc = \frac{h}{\lambda}c$ für ein Photon. Für mehrere Photonen n folgt nun $E = n\frac{hc}{\lambda}$. Wir betrachten einen Laser mit den Angaben $\lambda = 32 \cdot 10^{-9}\,m$ und einer Energie pro Puls von $E_{pulse} = 10 \cdot 10^{-6}\,J$, die Zeit für jeden Puls beträgt $t_{pulse} = 40 \cdot 10^{-15}\,s$ und die Anzahl der Pulse pro Sekunde beträgt $n_{pulse} = 50$.

Für die Anzahl der Photonen innerhalb eines Pulses gilt somit:

$$n_{photoninpulse} = \frac{\lambda}{hc}E = 1.61 \cdot 10^{12}$$

Für die Anzahl der Photonen innerhalb einer Sekunde folgt, mit einer Anzahl von $n_{pulse} = 50$:

$$n_{photonins} = 8.05 \cdot 10^{13}$$

Würden wir einen "durchgehenden" Strahl besitzen, hätten wir $n_{photoninpulse} = 1.61 \cdot 10^{12}$ in $t_{pulse} = 40 \cdot 10^{-15}\,s$, wobei wir dann $\frac{1\,s}{40 \cdot 10^{-15}\,s} = 2.5 \cdot 10^{13}$ Pulse pro Sekunde besitzen würden, also würde insgesamt eine Anzahl von:

$$n_{strahlins} = 4.03 \cdot 10^{25}$$

Photonen folgen. Für die Leistungsdichte σ_P folgt, wenn wir den Strahl auf eine "Kreisfläche" mit Durchmesser $d = 20 \cdot 10^{-4}\,cm$ fokussieren:

$$\sigma_P = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Für die Leistung folgt nun $P = \frac{W}{t} = \frac{E_{pulse}}{t_{pulse}} = 2.5 \cdot 10^8\,W$, also für die Leistungsdichte:

$$\sigma_P = 7.96 \cdot 10^{13}\frac{W}{cm^2}$$

Die durchschnittliche abgestrahlte Leistung erhalten wir aus der Anzahl der Pulse in der Sekunde multipliziert mit der Leistung pro Puls:

$$\bar{P} = P \cdot n_{pulse} = 1.25 \cdot 10^{10}\,W$$

Zum Vergleich betrachten wir ein kommerziell erhältliches Lasersystem mit $\lambda = 800 \cdot 10^{-9}\,m$, $E_{pulse} = 2.5 \cdot 10^{-3}\,J$, $t_{pulse} = 100 \cdot 10^{-15}\,s$, $n_{pulse} = 30$ pro Sekunde und einer Spitzenleistung(sdichte) von $\sigma_{P,max} = 5.2 \cdot 10^{15}\,\frac{W}{cm^2}$. Für dieses Lasersystem folgt für die Anzahl der Photonen in einem Puls:

$$n_{photoninpulse} = 10^{16}$$

Im Vergleich erhalten wir $\frac{n_{FEL}}{n_{konventionell}} = 1.61 \cdot 10^{-4}$, die Intensität in einem Puls liegt also beim FEL weit unter der eines konventionellen Lasers. Jedoch ist hierbei zu beachten, dass die Pulse des FEL nur 40% der Dauer des konventionellen Systems besitzen. Zudem besteht wohl die Möglichkeit mehr FEL Pulse in eine Sekunde zu bekommen als es beim konventionellen Laser möglich ist, somit kann eine hohe Intensität erreicht werden. Eine weitere Möglichkeit jedoch wäre auch, dass ich mich verrechnet habe und daher das Ergebnis herauskommt, dass die Intensität des FEL je Puls geringer ist, als die eines konventionellen Lasers, obwohl durch den FEL gerade “noch nie erreichte Intensitäten” erreicht werden sollten. Da diese Aussage jedoch nicht weiter spezifiziert ist (ob in einem Puls oder in einer Sekunde), bleibt mir nur das Warten auf die Korrektur.

3.

(a)

Für die Graphen folgt:

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

(b)

Für die Größenordnung des Sättigungsstromes folgt mit $P = U \cdot I$ und der sehr groben Schätzung vom erreichen des Sättigigungsstromes bei einer Saugspannung von $U \approx 50\,V$ folgt:

$$I_{saettigung} = \frac{P}{U} \approx 10^{-4}\,A \approx 10\,mA$$

(c)

Für das plancksche Wirkungsquantum folgt aus dem mathematica printout, wobei die kinetische Energie $(-eU_0)$ über die Frequenz $\nu = \frac{c}{\lambda}$ aufgetragen wird aus der Steigung des Graphen :

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$$

während sich die Austrittsarbeit, aus dem Achsenabschnitt, mit:

$$W_A = 4.65\,V$$

bestimmen lässt.

4.

Ein Photon ionisiert ein ^{20}Ne Atom, mit einem Ionisationspotential von $E_{io} = 21.6\,eV$. Das "ionisierte" Elektron besitzt eine kinetische Energie von $E_{elektron} = 13.6\,eV$. Somit hat das Photon min. eine Energie von $35.2\,eV$ abgegeben. Es gilt der EES: $E_{photon} = E_{io} + E_{elektron} + E_{photon'}$. Und für eine elastischen Stoß der IES: $\vec{p} = \vec{p}_{elektron} + \vec{p}_{neon} + \vec{p}'$. Somit folgt also für $E_{photon'} = E_{photon} - 35.2\,eV$ und für den Impuls: $\vec{p}' = \vec{p} - 4.81 \cdot 10^{-21} \frac{kg \cdot m}{s}$–, wobei $\vec{p}_{elektron} = 2 \cdot 10^{-24} \frac{kg \cdot m}{s}$ und $\vec{p}_{neon} = 4.81 \cdot 10^{-21} \frac{kg \cdot m}{s}$, wobei $m_{neon} = 3.34 \cdot 10^{-26}\,kg$. Somit kann der Impuls des Elektrons also vernachlässigt werden, da der Einfluss minimal ist. Dies liegt in der sehr kleinen Masse des Elektrons begründet. Die höhere Geschwindigkeit schafft das weniger an Masse beim Impuls nicht auszugleichen, obwohl die Energien ähnlich sind, jedoch geht dort die zweite Ordnung der Geschwindigkeit ein, wodurch mehr "Gewicht" auf die Geschwindigkeit fällt und somit die Energien in der gleichen Ordnung vorliegen.

Für die mittlere kinetische Energie eines Gases gilt $\bar{E}_{kin} = 3RT$. Wir gehen davon aus, dass wir die "Ionisations"-Energie des Neons nur auflösen können, wenn sie nicht mehr als 2 Größenordnungen kleiner ist als die mittlere kinetische Energie. Wir setzen also eine mittlere kinetische Energie von $\bar{E}_{kin} = 10^3\,eV$, wir erhalten nach umstellen der Formel für die Temperatur:

$$T = \frac{\bar{E}_{kin}}{3R} = 2 \cdot 10^{-17} K$$

Das würde bedeuten sehr nahe am absoluten Nullpunkt. Dies erscheint von dem Standpunkt aus sinnvoll, das das beobachten einzelner Atome sehr schwierig im allgemeinen ist und minimale Impulsänderungen somit so gut wie unsichtbar sein müssen und somit auch sind, wenn man die Brownsche Molekularbewegung betrachtet, die sie überlagert, kann man sie nicht mehr erkennen.

Für die Comptonstreuung mit einem Photon an "einem" Elektron und die 1. Ionisation von Neon folgt, wobei das Photon $E_{photon} = 13.8\,keV$ besitzen soll, dass das Neon so gut wie keinen Impulsübertrag erhält, da dieser im Gegensatz zum restlichen betrachten System verschwindend gering ist. Dies wird dadurch bewirkt, dass man die Bindungsenergie des Elektrons vernachlässigen kann, wenn ein Photon mit einer um ca. 3 Ordnung höheren Energie auf das Elektron stößt. Es bleibt jedoch zu überlegen, ob das Photon nicht auch mehrere Elektronen stoßen könnte oder evtl. sogar den Kern direkt trifft, was evtl. andere Effekte hervorrufen könnte.