

Experimentalphysik III, Übungsblatt 2

Heiko Dumlich

6. Mai 2006

1.

(a)

Wir stellen die Gleichung :

$$P(\nu, T) dA \cdot \cos \theta d\Omega d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} dA \cdot \cos \theta d\Omega d\nu$$

in Abhängigkeit der Wellenlänge dar. Hierbei gilt der Zusammenhang $\lambda \cdot \nu = c$, somit folgt $\lambda = \frac{c}{\nu}$ bzw. $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Wir betrachten also P_{tot} :

$$P_{tot} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu P(\nu, T)$$

Nun substituieren wir $\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} \rightarrow d\nu = -\frac{d\lambda}{c} \nu^2$. Einsetzen in P_{tot} und substituieren der Grenzen liefert :

$$P_{tot} = \int_{\frac{c}{\nu_1}}^{\frac{c}{\nu_2}} d\lambda \left(-\frac{\nu^2}{c}\right) \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Nun setzen wir $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ein, benutzen das “-” zum “drehen” der Grenzen und erhalten :

$$P_{tot} = \int_{\frac{c}{\nu_2}}^{\frac{c}{\nu_1}} d\lambda \left(\frac{c}{\lambda^2}\right) \frac{2h\frac{c^3}{\lambda^3}}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1}$$

Wir formen um und erhalten :

$$P_{tot} = \int_{\frac{c}{\nu_2}}^{\frac{c}{\nu_1}} d\lambda \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1}$$

$$P_{tot} = \int_{\frac{c}{\nu_2}}^{\frac{c}{\nu_1}} d\lambda P(\lambda, T)$$

Somit folgt für $P(\lambda, T)$:

$$P(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1}$$

Somit folgt für die gegebene Gleichung in Abhängigkeit von λ :

$$P(\lambda, T)dA \cdot \cos\theta d\Omega d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1} dA \cdot \cos\theta d\Omega d\lambda$$

(b)

Wir bestimmen ν_m und λ_m , die Frequenz und Wellenlänge der maximalen Strahlungsdichte. Hierzu leiten wir jeweils $P(\nu, T)$ und $P(\lambda, T)$ nach ν bzw. λ ab und setzen das Ergebnis gleich 0, um die Extrema zu erhalten.

Wir beginnen mit $P(\nu, T)$, wobei für die Ableitung folgt :

$$P'(\nu, T) = \frac{6h\nu^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} - \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{h}{kT} \cdot \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2}$$

Wir setzen die Ableitung 0 und kürzen durch $\frac{2h\nu^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2}$, wodurch wir :

$$0 = 3 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 3 - \frac{h\nu}{kT} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

erhalten. Wir stellen um :

$$3 = \left(3 - \frac{h\nu}{kT}\right) \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Numerisches Lösen mit *maple* und einsetzen der Konstanten liefert :

$$\nu_m \approx 5.88 \cdot 10^{10} \cdot T \cdot \left[\frac{1}{s \cdot K}\right]$$

Wir bestimmen nun die Ableitung von $P(\lambda, T)$:

$$P'(\lambda, T) = -5 \cdot \frac{2hc^2}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1} + \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{hc}{kT\lambda^2} \cdot \frac{\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1\right)^2}$$

Wir setzen die Ableitung 0 und kürzen durch $\frac{2hc^2}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) - 1\right)^2}$, das liefert:

$$0 = 5 - 5 \exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{hc}{kT\lambda} \cdot \exp\left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda}\right)$$

Daraus folgt :

$$5 = \left(5 - \frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda} \right) \exp \left(\frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)$$

Numerisches Lösen mit *maple* und einsetzen der Konstanten liefert :

$$\lambda_m \approx \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{T} [K \cdot m]$$

Der Vergleich mit den ausgeplotteten Graphen von $P(\nu, T)$ und $P(\lambda, T)$ bestätigt die Maxima, wobei die Graphen für $T = 273.15 K$ betrachtet wurden.

(Die *maple* worksheets können, falls benötigt, vorgezeigt werden, wobei dort die graphische Überprüfung der Werte durchgeführt wurde und die numerische Lösung berechnet wurden.)

(c)

Für das Wien'sche Verschiebungsgesetz für ν_m gilt, wie bereits in Aufgabenteil **(b)** gezeigt :

$$\nu_m \approx 5.88 \cdot 10^{10} \cdot T \cdot \left[\frac{1}{s \cdot K} \right]$$

Man kann dies auch anders durch die Substitution von $x_\nu = \frac{h\nu}{kT} \approx 2.82$ als :

$$\nu_m \approx \frac{x_\nu kT}{h}$$

schreiben.

Für die Wellenlänge hätte man in **(b)** auch eine Substitution mit $x_\lambda = \frac{hc}{\lambda kT} \approx 4.97$ durchführen können. Dies wird in Aufgabenteil **(d)** nützlich sein.

(d)

Wir betrachten ν_m und λ_m , wobei sofort die Abhängigkeit von T bzw. $\frac{1}{T}$ auffällt. Die Frequenz ist hierbei proportional zur Temperatur und die Wellenlänge ist antiproportional zur Temperatur. Dies kann als sinnvoll erachtet werden, da die Variablen ν und λ über das Verhältnis $\lambda \cdot \nu = c$ auch antiproportional verknüpft sind. Wir setzen einige Testtemperaturen ein :

Zuerst betrachten wir die Spezialfälle $T \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow 0$, somit folgt :

$$(T \rightarrow \infty) : \nu_m \rightarrow \infty \mid (T \rightarrow 0) : \nu_m \rightarrow 0$$

$$(T \rightarrow \infty) : \lambda_m \rightarrow 0 \mid (T \rightarrow 0) : \lambda_m \rightarrow \infty$$

Nun betrachten wir noch den Wert für $0^\circ C = 273.15 K$:

$$\nu_m \approx 1.61 \cdot 10^{13} \frac{1}{s}$$

$$\lambda_m \approx 1.06 \cdot 10^{-4} m$$

Wir prüfen das Ergebnis mit $c = \lambda_m \cdot \nu_m$ und erhalten :

$$c = 1.71 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Diese Abweichung würde auf den ersten Blick selbst für eine numerische Lösung (Abweichung ca. einer halben Größenordnung) zu groß sein. Jedoch wissen wir, dass die Maxima für Frequenz und Wellenlänge verschieden sind, also auch bei einer Temperatur nicht als äquivalent betrachtet und auch nicht durch die Beziehung $c = \lambda_m \cdot \nu_m$ umgeformt werden dürfen. Dies haben wir bereits durch die Substitution in Aufgabenteil **(a)** gezeigt. Jedoch kann die Abweichung vom c -Wert als Maß für den Abstand der Maxima zwischen der Frequenz und der Wellenlänge betrachtet werden, wobei wir schreiben können :

$$c = \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{T} \cdot 5.88 \cdot 10^{10} \cdot T \cdot \left[\frac{m}{s}\right] = 5.88 \cdot 10^{10} \cdot 2.90 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} = 1.71 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Wir erhalten hieraus die Faktoren $\frac{x_\nu}{x_\lambda} \approx 0.57$ bzw. $\frac{x_\lambda}{x_\nu} \approx 1.76$, mit denen die Umformungen zwischen ν_m und λ_m möglich werden, es gilt : $c = \frac{x_\lambda}{x_\nu} \nu_m \cdot \lambda_m$

Um einen zweiten Wert zu erhalten betrachten wir die Temperatur bei $T = 500 K$ und erhalten :

$$\nu_m \approx 2.94 \cdot 10^{13} \frac{1}{s}$$

$$\lambda_m \approx 5.80 \cdot 10^{-6} m$$

Wir benutzen diesmal unseren Umrechnungsfaktor und erhalten für c :

$$c = 3.00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Dies stimmt sehr gut mit der Erwartung für c überein.

2.

Wir bestimmen die (hypothetische) heutige Temperatur des Strahlers der 'kosmischen-Mikrowellen-Hintergrundstrahlung' aus dem gezeigten Spektrum, wobei wir die aus **Aufgabe 1 (b)** bestimmte Formel für die maximale Wellenlänge $\lambda_m \approx \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{T} [K \cdot m]$ verwenden. Umstellen liefert :

$$T_{strahl} \approx \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{\lambda_m} [K \cdot m]$$

wobei wir $\frac{1}{\lambda_m} = 5.2 \cdot \frac{1}{cm} = 5.2 \cdot 10^2 \frac{1}{m}$ aus dem Graphen bestimmt haben, somit folgt für die Temperatur $T_{strahl} \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \cdot 5.2 \cdot 10^2 \cdot \frac{K \cdot m}{m} \approx 1.51 K$.

3.

Wir betrachten die Strahlungsleistung einer Neon-Leuchtstoffröhre, wenn wir sie als idealen Schwarzkörper annehmen. Somit gilt für die abgestrahlte Leistung :

$$P_{ges} = A \cdot T^4 \cdot \sigma$$

Wir gehen von einer zylinderförmigen Leuchtstoffröhre aus (wobei wir davon ausgehen, dass nur die Mantelfläche strahlt und die Enden für die Stromversorgung benutzt werden), d.h. $A_{Mantel} = \pi dl$, wobei wir von einer Länge von $l = 1.4m$ und einem Durchmesser von $d = 2cm = 2 \cdot 10^{-2}m$ ausgehen. Für die Temperatur nehmen wir $T = 2700K$ an. Die Konstante σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante und besitzt den Wert $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$. Somit folgt dann für die Strahlungsleistung nach einsetzen :

$$P_{ges} = 2.65 \cdot 10^5 W$$

4.

Siehe -Anhang- (Mathematica printout).