Heiko Dumlich 3. Juli 2006

10 Übungsblatt zur Experimentalphysik III

10.1 Quantenzahlen

Wir betrachten die möglichen Quantenzahlen des Gesamt-Bahndrehimpulses L aus der Kopplung von einem p- und d-Elektron.

Für das p-Elektron erhalten wir $l = 1\, m = -1, 0, 1\, s = \frac{1}{2}$ und für das d-Elektron erhalten wir $l = 2\, m = -2, -1, 0, 1, 2\, s = \frac{1}{2}$, somit folgen für den Gesamt-Bahndrehimpuls die möglichen Quantenzahlen mit: $L = 1, 2, 3$. Für den Gesamtdrehimpuls J folgen also mit $|L - S| \leq J \leq L + S$ und $S = 1$ die möglichen Quantenzahlen $J = 0, 1, 2, 3, 4$.

Für die Kopplung eines Drehimpulses mit Quantenzahlen $L_1, M_1 = 2, 0$ mit dem Drehimpuls $L_2, M_2 = 2, -1$ folgt für $J = 1, 2, 3, 4$ und für $M_J = -1$.

10.2 Larmor-Frequenzen

Wir betrachten ein Elektron und ein Proton im Magnetfeld von $B = 1T$. Es ist die Larmorfrequenz zu berechnen, für diese gilt:

$$\omega_{elektron} = \frac{g_J \mu_B}{\hbar} B$$

bzw.

$$\omega_{proton} = \frac{g_J \mu_k}{\hbar} B$$

Für das Elektron gilt ein Faktor von $g = 2.002\ldots$ (genauer Wert siehe *mathematica*-printout)

Wir setzen dies ein und erhalten für die Larmor-Frequenz des Elektrons:

$$\omega_{elektron} = 1.761 \cdot 10^{11}\, \frac{1}{s}$$

Für die Wellenlänge folgt mit $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$:

$$\lambda_{elektron} = 0.0107\, m$$

Wir betrachten nun das Proton, dieses besitzt einen *Lande-Faktor* von $g_J = 5.58$,somit folgt:

$$\omega_{proton} = 2.672 \cdot 10^8\, \frac{1}{s}$$

Somit folgt eine Wellenlänge von:

$$\lambda_{proton} = 7.05\, m$$

Diese Frequenzen sind in das elektromagnetische Frequenzspektrum einzuordnen, wobei man das Elektron in den Mikrowellenbereich einordnen kann und das Proton in den Radiowellenbereich.

10.3 4p Niveau von K

Das 4p Niveau von K befindet sich ohne Berücksichtigung der Feinstrukturaufspaltung $1.6147\,eV$ über dem Grundzustand. Es ist ein vollständiges und quantitativ richtiges Diagramm der optischen Übergänge von K($4p \rightarrow 4s$) in einem Magnetfeld der Stärke $B = 500\,mT = 0.5\,T$ unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Aufspaltung und des anomalen Zeeman-Effektes zu zeichnen. Die Konstante der Spin-Bahn-Aufspaltung ist mit $a = 4.7\,meV$ gegeben. Übergänge mit $|\Delta M_J| > 1$ sind extrem unwahrscheinlich und daher zu vernachlässigen.

(siehe Anhang)

10.4 Feldgradient im Stern-Gerlach-Magneten

Wir betrachten einen $L = 50\,cm = 0.5\,m$ langen Stern-Gerlach-Magnenten, der für Silber-Atome (ein 5s Elektron außerhalb abgeschlossener Schalen) aus einem $T = 960°C = 1233.15\,K$ heißen Ofen zu einer Aufspaltung des Atomstrahls von $2 \cdot z = 1\,mm = 10^{-3}\,m \Rightarrow z = 0.5 \cdot 10^{-3}\,m$ führt. Wir nutzen für die kinetische Energie den Ansatz $E_{kin} = 2kT$, da heiße Atome eine größere Wahrscheinlichkeit besitzen, die Öffnung des Ofens zu passieren. Somit folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = 3.41 \cdot 10^{-20}\,J = 0.213\,eV$$

Wir wollen nun den Feldgradienten berechnen, es folgt, da wir die Aufspaltung benötigen und wir den Versuch so anordnen können, dass nur eine Komponenten für die Aufspaltung betrachtet werden muss, aus:

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla\left(\vec{\mu} \cdot \vec{B}\right)$$

der vereinfachte Term:

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

...

Betrachte $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ und die Näherung, dass die Beschleunigung in z-Richtung linear ist, dann ist es möglich durch Newtons Axiom $F = ma$ und durch den erhaltenen Ausdruck für a, der nur von z und t abhängt geschickt den Feldgradienten zu bestimmen, nachdem man durch $v = \frac{L}{t}$ die Zeit, die das Feld auf das Teilchen wirkt, bestimmt hat.

10.5 Mittleres magnetisches Moment pro Volumen M

Wir betrachten Atome mit einem permanenten magnetischen Moment $\vec{\mu}_s$, welches von dem Elektronenspin $\frac{1}{2}$ verursacht wird. Diese magnetischen Momente werden in einem $\vec{B}$-Feld ausgerichtet. Dies Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden verschiedenen Energieniveaus $\uparrow$ und $\downarrow$ im Magnetfeld wird durch die Boltzmannverteilung gegeben, wobei für diese gilt:

$$\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow} = e^{-\frac{E_\uparrow - E_\downarrow}{kT}} \tag{1}$$

Es sei n die Anzahl der Atome pro Volumen und M das mittlere magnetische Moment pro Volumen in Feldrichtung. Es ist zu zeigen, dass die Beziehung:

$$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) \tag{2}$$

gilt.

Die gesamte Anzahl n setzt sich aus den zwei Bestandteilen $n_\uparrow$ und $n_\downarrow$ zusammen, es gilt:

$$n = n_\uparrow + n_\downarrow \tag{3}$$

Für die Magnetisierung gilt:

$$M = \sum_i \mu_i$$

Es folgt also:

$$M = n\frac{n_\uparrow \mu_\uparrow + n_\downarrow \mu_\downarrow}{n}$$

Nun gilt für $\mu = \mu_B g m_s$ wobei m_s nur $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ annehmen kann und $g = 2$ gilt, somit folgt $-\mu_\uparrow = \mu_\downarrow$, da die μ sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, dies können wir einsetzen und erhalten:

$$M = n\frac{n_\uparrow - n_\downarrow}{n}\mu_\uparrow$$

Nun können wir zudem $\mu_\uparrow = \mu_B g m_s$ einsetzen, wobei $m_s = \frac{1}{2}$ und $g = 2$ somit folgt mit $\mu_\uparrow = \mu_B$:

$$M = n\mu_B\frac{n_\uparrow - n_\downarrow}{n}$$

Hieraus folgt dann indem wir (3) einsetzen und (1) nach $n_\uparrow$ umstellen und dann einsetzen:

$$M = n\mu_B\frac{n_\downarrow\left(e^{-\frac{E_\uparrow - E_\downarrow}{kT}} - 1\right)}{n_\downarrow\left(e^{-\frac{E_\uparrow - E_\downarrow}{kT}} + 1\right)}$$

Wir können eine e-Funktion herausziehen und kürzen:

$$M = n\mu_B\frac{\left(e^{\frac{E_\downarrow}{kT}} - e^{\frac{E_\uparrow}{kT}}\right)}{\left(e^{\frac{E_\downarrow}{kT}} + e^{\frac{E_\uparrow}{kT}}\right)}$$

Mit der Definition des Tangens Hyperbolicus: $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ und $E_\downarrow = \mu_B B$ und $E_\uparrow = -\mu_B B$,folgt:

$$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

Unter den gegebenen Bedingungen gilt:

$$M = \frac{n\mu_B^2 B}{kT},$$

dies liegt, wie man im Anhang sehen kann, daran, dass man in diesem Fall einen linearen Zusammenhang hat und für kleine Werte durch die Taylorentwicklung $\tanh(x) = x$ nähern kann, wie den Befehl "Series" zeigt. Somit folgt also:

$$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) \Rightarrow M = n\mu_B \frac{\mu_B B}{kT}$$

und dies entspricht gerade:

$$M = \frac{n\mu_B^2 B}{kT}$$

was zu zeigen war.