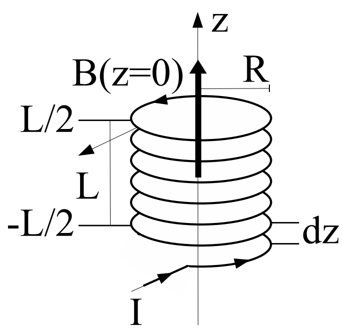
1. Kraft auf eine Leiterschleife
Zeigen Sie mit Hilfe des Biot–Savart–Gesetzes, dass das Magnetfeld eines dünnen, unendlich langen Leiters, in dem der Strom I fließt, gegeben ist durch:

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\,. \tag{1}$$

Hinweis: Legen Sie den Leiter z.B. entlang der z-Achse. Da der Leiter unendlich lang ist, reicht es, das Magnetfeld $\vec{B}$ bei $z = 0$ zu berechnen. Überlegen Sie sich, dass $\vec{B}$ nur vom Abstand zum Leiter abhängen kann und tangential zu einem Kreis in der xy-Ebene liegen muss. Nun brauchen Sie nur noch den Betrag von $\vec{B}$ auszurechnen, indem Sie über die gesamte Leiterlänge integrieren. Das dabei auftretende Integral finden Sie in jeder Formelsammlung.

(3 Punkte)

2. Magnetfeld einer langen Spule
Leiten Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot–Savart das Magnetfeld auf der Achse einer langen Spule her:
a) Berechnen Sie zunächst das Feld im Mittelpunkt der Spule $B(z = 0)$, indem Sie über eine endlich lange, kreisförmige Spule der Länge L mit dem Radius R und N der Anzahl der Windungen integrieren. Zeigen Sie, dass Sie für $L \gg R$ die in der Vorlesung abgeleitete Formel $B = (\mu_0 NI)/L$ erhalten.
b) Berechnen Sie nun das Feld auf einem beliebigen Punkt der z–Achse!
Hinweis zu Teilaufgabe a): Verwenden Sie als Ausgangspunkt Ihrer Herleitung das in der Vorlesung berechnete Beispiel für das Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife:



$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,. \tag{2}$$

Benutzen Sie den Ansatz aus Gl. (2), um den Beitrag $dB(z)$ zu berechnen, den der Strom dI auf der Länge dz eines kleinen Teils der Spule erzeugt. Die Größe dI lässt sich mit Hilfe der Wicklungsdichte $n = N/L$ durch dz ausdrücken. Unter Zuhilfenahme des Biot–Savart–Gesetzes lässt sich nun der Magnetfeldbeitrag in der Mitte der z-Achse formulieren.

(4 Punkte)

3. Doppeltes Kreuzprodukt
a) Beweisen Sie den Entwicklungssatz für doppelte Kreuzprodukte:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\,. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Satzes für den Differentialoperator $\vec{\nabla}$, indem Sie zeigen, dass gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}\,. \tag{4}$$

(3 Punkte)