



# B04 Supraleitung am 11. Juni 2007

## 1 Ziele des Versuchs

Der Versuch ermöglicht einen Einblick in die Tieftemperaturphysik und dessen Phänomene, hier die Supraleitung, die nur bei tiefen Temperaturen beobachtbar ist, wobei selbst Hochtemperatursupraleiter noch stark gekühlt werden müssen. Die Supraleitung ermöglicht die Erzeugung starker Magnetfelder, wobei wir zusätzlich die Grenzen der Supraleitung untersuchen, d.h. ab wann sie einsetzt und wann sie zerstört wird.

## 2 Physikalische Grundlagen des Versuchs

### 2.1 Theorie des freien Elektronengases

Im Modell des freien Elektronengases werden die Valenzelektronen der Gitteratome als freie Teilchen im Festkörpern angesehen, die mit den Gitteratomen nicht wechselwirken und auf Grund des Pauli-Prinzips auch mit Elektronen selten wechselwirken. Die Elektronen besetzen, da sie Fermionen sind und nicht die gleichen Energieniveaus besetzen dürfen, nun jeweils von der Grundzustandsenergie angefangen ein Niveau. Im Falle von  $T = 0$  besetzen die Elektronen durchgehend alle Niveaus bis zur Fermi-Kante, die als das Energie-Niveau definiert ist, dass von dem letzten Elektron besetzt wird. Die Fermi-Energie, welche diesem Energie-Niveau entspricht, ist definiert als:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

#### 2.1.1 Zustandsdichte von Elektronen

Die Zustandsdichte beschreibt die Anzahl der Zustände im Energieintervall  $dE$ .

$$D(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$$

### 2.1.2 Fermi-Funktion

Die Fermifunktion gibt die Verteilung der Elektronen für den Fall  $T > 0$  an, wobei diese nun auf Grund der Energie die sie besitzen, nicht mehr an ihr Niveau gebunden sind und somit auch höhere Niveaus als die Fermi-Kante besetzen können.

$$F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

## 2.2 BCS-Theorie

Die Voraussetzung für eine Theorie der Supraleitung besteht in einer attraktiven Wechselwirkung zwischen den Elektronen in der Nähe der Fermi-Oberfläche. Zudem muss diese langreichweitig sein, um der Abstoßung, die durch die Coulomb-Kraft existiert entgegenzuwirken. Die BCS-Theorie benutzt hierfür die Elektron-Phonon-Wechselwirkung, wobei angenommen wird, dass ein Elektron sich durch den Festkörper schnell bewegt und auf Grund seiner negativen Ladung eine Deformationsspur im Gitter hinterlässt, da die positiv geladenen Ionenrümpfe auf Grund der Coulombkraft angezogen werden. Auf Grund dieser Deformation und die damit verbundene Anhäufung positiver Ladung, wird ein zweites Elektron angezogen. Die schnelle Bewegung der Elektronen im Vergleich zur langsamen der schweren Ionenrümpfe, ermöglicht es, dass ein Elektron schon sehr weit entfernt ist, wenn die Ionenrümpfe reagieren und ein zweites Elektron anziehen, so, dass dieses das andere Elektron und dessen negative Ladung nicht sieht. Diese erzeugten Gitterdeformationen werden im quantenmechanischen Bild als Überlagerung von Phononen angesehen, wobei auf Grund des Energiesatzes die Phononen nur innerhalb der Unschärferelation existieren dürfen, d.h. sie sind virtuelle Phononen.

### 2.2.1 Cooper-Paar

Ein Cooper-Paar ist die oben beschriebene Bindung von zwei Elektronen über den Austausch von virtuellen Phononen. Die Wechselwirkung wird maximal für den Fall von antiparallelem Spin wodurch das Cooper-Paar Spin 0 oder 1 und somit bosonische Eigenschaften besitzt, und antiparallelen Impulsen, da hierfür die Anzahl der Endzustände maximiert wird. Die Kohärenzlänge der Cooper-Paare ist ein Maß für die Ausdehnung der Cooper-Paare. Die Kohärenzlänge, die man über die Unschärferelation abschätzen kann, beträgt ungefähr  $\lambda_{CP} \approx \frac{E_F}{k_F \Delta}$ , mit der Fermi-Energie  $E_F$ , dem Fermi-Vektor  $k_F$  und der Energielücke  $\Delta$ .

### 2.2.2 Isotopeneffekt

Es existiert eine Korrelation zwischen der Masse und der Sprungtemperatur, welche mit:

$$T_c M^a = const.$$

gegeben ist, wobei  $a \approx \frac{1}{2}$ . Mit Hilfe der BCS-Theorie kann man die Korrelation erklären, indem man annimmt, dass die Gitteratome, die durch das Cooper-Paar zu Schwingungen angeregt werden mit einer Frequenz  $\omega \propto \sqrt{M}$  schwingen. Dies geht jetzt jedoch

in die Bindungsenergie der Cooper-Paare ein, wodurch die Sprungtemperatur verändert wird. Das für verschiedene Materialien der Wert nicht genau  $a = \frac{1}{2}$  beträgt folgt z.B. aus Defekten, wodurch die Gitteratome keiner perfekten Ordnung mehr unterliegen.

### 2.2.3 Auftreten einer Energielücke

Der BCS-Grundzustand liegt nur minimal (einige meV) unter der Fermi-Kante, so dass bei niedrigen Temperaturen Elektronen in diesen übergehen. Da die Cooper-Paare bosonischen Charakter besitzen, sind diese dem Pauli-Prinzip nicht unterworfen und der Zustand kann von einer unbegrenzten Zahl von Cooper-Paaren besetzt werden. Auf Grund dieser Umstände entsteht nun eine Energielücke. Das der BCS-Grundzustand unter der Fermi-Kante liegt, folgt aus der Bindung der Cooper-Paare, die energetisch günstiger ist.

## 2.3 Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Die Erwartung für einen perfekten Leiter (d.h.  $R = 0$ ) ist, dass für diesen eine Änderung des magnetischen Flusses, im Falle des Ausschaltens des Magnetfeldes nicht möglich ist, da  $I \cdot R = U_{ind} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{f} = -\dot{\vec{B}} \cdot \vec{F} = 0$  gilt. Die Beobachtung im Supraleiter zeigt jedoch, dass dieser das Feld immer aus seinem Inneren herausdrängt, dieser Effekt wird als Meißner-Ochsenfeld-Effekt bezeichnet. Beim Supraleiter wird also durch Oberflächenströme ein von aussen angelegtes magnetisches Feld immer kompensiert, so dass das Innere feldfrei bleibt. Der Effekt ist unabhängig vom Weg (Es spielt keine Rolle ob man erst ein Magnetfeld einstellt und dann kühlt oder erst kühlt und dann ein Magnetfeld einschaltet), im Gegensatz zum perfekten Leiter, bei dem man ein "einfrieren" des magnetischen Zustandes erwartet, wird beim Supraleiter immer das Feld rausgedrängt.

## 2.4 Kritisches Magnetfeld $B_C$ als Funktion der Temperatur

Das kritische Magnetfeld ergibt sich in Näherung als:

$$B_c(T) \approx B_0 \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad (1)$$

mit  $B_0 = B_c(T = 0)$  und  $T_c$  der kritischen Temperatur. Der Supraleiter geht für Magnetfelder mit einer größeren als der kritischen Feldstärke in die normalleitende Phase über. Dies folgt aus der Korrelation des Magnetfeldes und der Stromdichte, wobei diese aus den Wirbelströmen die den Diamagnetismus erzeugen, folgt. Durch eine Anregung des bosonischen Zustandes der Cooper-Paare mit einer Energiezufuhr über die Bindungsenergie spaltet die Bindung auf. Dies führt zum Verlust der Supraleitung.

Für die theoretische Berechnung von  $B_0$  können wir:

$$B_0 = T_c \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \rho}{2M}} \quad (2)$$

mit  $M$  dem Molgewicht,  $\gamma$  der Sommerfeldkonstanten und  $\rho$  der Dichte benutzen.

## 2.5 Sprungtemperatur $T_c$

Die Sprungtemperatur  $T_c$  stellt die Temperatur dar, ab der Supraleitung für ein bestimmtes Material auftritt. Sie zeichnet sich durch einen Widerstand von  $R = 0$  aus, das Material wird zum perfekten Diamagneten mit der Suszeptibilität  $\chi = -1$ .

## 3 Versuchsaufbau und Messprinzip

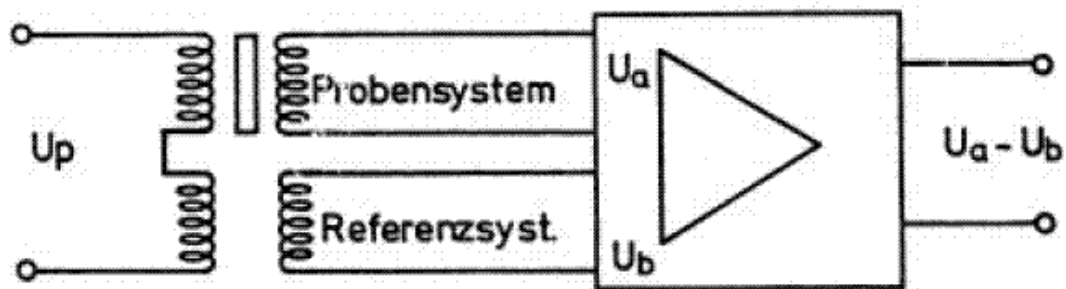
### 3.1 Quelle

Als Quellen verwenden wir Zinn und Indium, an denen wir die Supraleitung messen und deren kritische Felder und Sprungtemperaturen bestimmen werden.

### 3.2 Detektor

Zur Detektion der Supraleitung benutzen wir ein Spulenpaar in Transformatorschaltung, wobei wir die Differenz zwischen Proben- und Referenzsystem vergleichen.

### 3.3 Schaltbild



### 3.4 Versuchsaufbau

Skizze s. Aufgabe d). Es wird ein Vakuum zur Abschirmung von Wärmestrahlung erzeugt und zusätzlich sind die Behältnisse versilbert, wobei die Versilberung reflektierend auf Strahlung wirkt. Über einen Anschluss können die Indium- oder Zinnprobe angesteuert werden.

### 3.5 Versuchsdurchführung

Die Kühlung wird durch flüssigen Stickstoff als Vorkühlung und flüssigem Helium als direkte Kühlung durchgeführt. Zuvor ist auf jedenfall darauf zu achten, dass sich in den Behältnissen kein Kondenswasser mehr befindet, da durch die Abkühlung sich das Wasser ausdehnen und die Apparatur zerstören würde. Es wird durch Variation des Drucks die Temperatur weiter erniedrigt, wobei diese Möglichkeit aus dem allgemeinen Gasgesetz folgt, wobei  $pV = NRT$  und  $V = const.$ . Somit ist  $p \propto T$  und wir können über Verringerung des Drucks die Temperatur weiter runterfahren. Die Messungen können dann

in Abhängigkeit von der Temperatur durchgeführt werden, bzw. im Fall der kritischen Feldmessung durch Variation des angelegten Stromes.

## 4 Auswertung

a)

Die Bestimmung der Sprungtemperaturen geschieht durch zeichnerische Bestimmung des kritischen Drucks und anschließender Umrechnung über eine Dampfdruck-Temperatur-Tabelle in die Sprungtemperatur. Es ergeben sich aus den im Anhang [1] zu findenden Graphen die folgenden Sprungtemperaturen:

$$\begin{aligned}T_c(\text{Sn}) &= (3.706 \pm 0.001) \text{ K} \\T_c(\text{In}) &= (3.387 \pm 0.001) \text{ K}\end{aligned}$$

Der Vergleich mit den Literaturwerten (aus[2]):

$$\begin{aligned}T_c(\text{Sn}) &= (3.722 \pm 0.001) \text{ K} \\T_c(\text{In}) &= (3.408 \pm 0.001) \text{ K}\end{aligned}$$

zeigt, dass wir systematisch zu kleine Sprungtemperaturen finden. Dies liegt vermutlich am Aufbau, da die Messung der Temperatur über den Druck und die zeitliche Druckänderung nicht die wirkliche Systemtemperatur wiedergibt, da sich mit dem geänderten Druck erst die Temperatur einstellen muss und nicht instantan vorherrscht. Daher ist davon auszugehen, dass die gemessene Temperatur ein wenig geringer ist als die wirkliche Temperatur, was mit den Messergebnissen qualitativ übereinstimmen würde.

Die Übergangsbreiten ergeben sich zu

$$\begin{aligned}2\delta T_c(\text{Sn}) &= (0.025 \pm 0.001) \text{ K} \\2\delta T_c(\text{In}) &= (0.013 \pm 0.001) \text{ K}\end{aligned}$$

b)

Die Auftragung von  $B_c(T)$  über  $\left(\frac{T}{T_c}\right)^2$  und Anwendung der linearen Regression ([4]) zeigt uns, da wir ein  $R^2$  in der Nähe von 1 finden, dass das kritische Feld in guter Näherung eine parabolische Funktion ist. Für  $B_c(0)$  finden wir aus der linearisierten Auftragung von  $B_c(T)$ , wobei wir den Mittelwert aus dem Wert für die Steigung und dem Achsenabschnitt nehmen:

Zinn		Indium	
Temperatur in $K$	$B_c(T)$ in Gauss	Temperatur in $K$	$B_c(T)$ in Gauss
$(3.01 \pm 0.01)$	$(99 \pm 9)$	$(3.01 \pm 0.01)$	$(49 \pm 6)$
$(2.49 \pm 0.01)$	$(168 \pm 18)$	$(2.49 \pm 0.01)$	$(103 \pm 5)$
$(2.01 \pm 0.01)$	$(216 \pm 14)$	$(2.01 \pm 0.01)$	$(150 \pm 5)$
$(1.72 \pm 0.02)$	$(242 \pm 13)$	$(1.72 \pm 0.02)$	$(175 \pm 5)$
0	$(307.3 \pm 6.5)$	0	$(234.3 \pm 4.0)$

Der Vergleich mit den Literaturwerten für  $B_c(0)$ , wobei diese mit  $B_{c0}(\text{Sn}) = (305 \pm 2)$  Gauss und  $B_{c0}(\text{In}) = (281.5 \pm 2)$  Gauss gegeben sind, zeigt, dass der für In bestimmte Wert zu niedrig ist, während der Sn-Wert sehr gut bestätigt werden kann. Da der Wert für eine der Proben bestätigt werden konnte, ist davon auszugehen, dass die In Probe verunreinigt wurde. Dies zeigt sich auch an den aufgenommenen Kurven, wo es zu Ausreißern kam ([3]).

c)

Zur Berechnung der thermodynamisch kritischen Felder  $B_c(0)$  benutzen wir Formel (2):

$$B_0 = T_c \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \rho}{2M}}$$

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Werten für Indium und Zinn erhalten wir (Rechnung siehe[4]):

$$\begin{aligned} B_{c0}(\text{Sn}) &= (308.68 \pm 0.44) \text{ Gauss} \\ B_{c0}(\text{In}) &= (280.04 \pm 0.40) \text{ Gauss} \end{aligned}$$

der Fehler folgt aus der Annahme eines absoluten Fehlers von  $0.01 \frac{g}{cm^3}$  bei der Dichte und dem Fehler der kritischen Temperatur. Der Vergleich mit den experimentellen Werten zeigt uns wiederum die Übereinstimmung von dem Sn-Wert, während der In-Wert wieder nicht verifiziert werden kann. Eine Berechnung über den Isotopeneffekt könnte evtl. ein besseres Ergebnis liefern, jedoch müsste man dann die Zusammensetzung des Indiums kennen, bzw. durch probieren versuchen die Zusammensetzung so abzugleichen, dass das Ergebnis mit der Messung übereinstimmt. Wir besitzen zwei verschiedene Massen in dem Isotop, wobei wir diese dann prozentual nach Anteil am Stoff einfließen lassen und einen Mittelwert bilden der uns eine mittlere kritische Temperatur liefert, woraus es möglich sein sollte einen annehmbaren Wert zu erhalten.

d)

siehe Messprotokoll [5]

## zusätzliche Fragen

e)

Die Widerstandsmethode birgt die Gefahr eine lokal supraleitende Bahn zu messen, welche aus der Inhomogenität des Materials resultiert und daraus zu schliessen das bereits das gesamte Material supraleitend wäre.

f)

Wir betrachten die Differenz der spezifischen Wärmen der NL- und SL-Phase:

$$\Delta c = c_n - c_s$$

Für  $p = \text{const.}$  ist die spezifische Wärme gegeben mit:

$$c = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

d.h. für die Entropiedifferenz  $\Delta S = S_n - S_s$ :

$$\Delta c = T \frac{\partial}{\partial T} (S_n - S_s)$$

mit der Gibbs-Energie ( $G = U + pV - TS$ ) folgt:

$$c = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$$

und hieraus wiederum für die Differenz

$$\Delta c = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} (G_n - G_s)$$

Das Differential der Gibbs-Energie ist gegeben mit

$$dG = -SdT + Vdp - mdB$$

mit dem magnetischen Moment  $m$ . Gehen wir von konstanter Temperatur und Druck aus, so folgt:

$$dG = -mdB$$

Integration liefert:

$$G(B) - G(0) = -m \int_0^B dB$$

Die magnetischen Momente im Normalleiter sind vernachlässigbar, d.h.  $G(B) - G(0) \approx 0$ , zudem gilt für  $B_c(T)$ , dass  $G_s = G_n$  sein muss, hieraus folgt:

$$G_n(T) - G_s(T) = -m \int_0^{B_c(T)} dB$$

Das magnetische Moment wird bei konstanter Magnetisierung und konstantem Volumen zu  $m = MV$ , wobei  $M = \chi H = -\frac{B}{\mu_0}$ . In diesem Fall ist  $\chi = -1$ . Dies führt uns auf:

$$G_n(T) - G_s(T) = \frac{V}{\mu_0} \int_0^{B_c(T)} B dB = \frac{V}{2\mu_0} B_c^2(T)$$

Nutzen wir die Näherung (1), so folgt:

$$G_n(T) - G_s(T) = \frac{V}{2\mu_0} B_0^2 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)^2$$

Einsetzen in  $\Delta c = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} (G_n - G_s)$  liefert uns  $\Delta c$ :

$$\begin{aligned} \Delta c &= -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{V}{2\mu_0} B_0^2 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)^2 \\ &= -\frac{TVB_0^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)^2 \\ &= -\frac{TVB_0^2}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial T} 2 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right) (-2) \frac{T}{T_c^2} \\ &= \frac{2TVB_0^2}{\mu_0 T_c^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(T - \frac{T^3}{T_c^2}\right) \\ &= \frac{2TVB_0^2}{\mu_0 T_c^2} \left(1 - \frac{3T^2}{T_c^2}\right) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun  $T = T_c$ , so erhalten wir ein  $\Delta c$  von:

$$\Delta c = -\frac{4VB_0^2}{\mu_0 T_c}$$

**g)**

Das Kompensationsprinzip ermöglicht es Fehler die aus der Bauart der Spule folgen zu vernachlässigen, da sie in der Vergleichsspule identischer Bauart identisch auftreten und sich somit ausgleichen (z.B. auch temperaturabhängige Fehler). Hierdurch wird eine genauere Messung möglich.



## 5 Zusammenfassung und Diskussion

Die Messwerte für Zinn stimmen gut mit der Erwartung überein, d.h. der Versuchsaufbau scheint korrekt zu sein. Jedoch sind die Ergebnisse von Indium nicht mit den Literaturwerten vergleichbar, dies liegt vermutlich am Isotopeneffekt oder an einer sonstigen Verunreinigung der Probe. Hierbei fällt besonders das magnetische Verhalten des Indiums auf, wobei die Graphen in [3] eine "Delle" bzw. einen Ausreißer zeigen, welcher evtl. aus einer Verunreinigung oder aus dem Isotopeneffekt folgen. Die Messmethode liefert sehr genaue Ergebnisse, wobei leider eine systematische Abweichung für die Bestimmung der Sprungtemperatur aufgetreten ist (Begründung s. Aufgabenteil - Temperatur nicht instantan im thermodynamischen Gleichgewicht). Das kritische Magnetfeld von Zinn konnte sowohl experimentell als auch durch theoretische Rechnung mit dem Literaturwert verifiziert werden, während die experimentelle Auswertung für das Indium den besprochenen Fehler liefert und die theoretische Bestimmung mit dem Literaturwert übereinstimmt.

## 6 Quellen

- [1] Graphen zur Bestimmung von  $T_c$
- [2] Tabelle CRC - Handbook of Chemistry and Physics mit den Literaturwerten von Sn und In
- [3] Graphen zur Bestimmung von  $B_c(T)$  und  $B_c(0)$
- [4] Mathematica Printout
- [5] Messprotokoll
- [6] Dampfdruck-Temperatur-Umrechnungstabellen