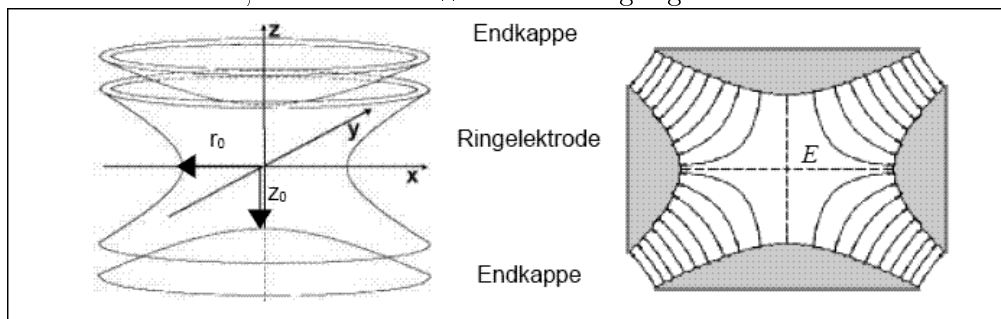


# A01 Mie-Streuung an levitierten Flüssigkeitströpfchen am 14. Mai 2007

## 1 Physikalische Grundlagen des Versuchs

### 1.1 Paulfalle

Die Paulfalle ist eine Apparatur zur Speicherung von geladenen Teilchen, sie besteht aus mehreren Elektroden, an denen ein Wechselfeld angelegt wird. Ein Bild einer Paulfalle:



Man benötigt eine der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage proportionale rücktreibende Kraft  $\vec{F} = -c\vec{r}$  mit  $c > 0$ , welche ein Potential der Form  $\phi = \phi_0 (\lambda x^2 + \sigma y^2 + \gamma z^2)$  besitzt, um ein Teilchen in einen Schwebezustand zu versetzen. Dies setzt jedoch  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  voraus, wobei aus der Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0$$

folgt, dass  $\lambda + \sigma + \gamma = 0$  erfüllt sein muss. Also gibt es in der Elektrostatik keine Möglichkeit ein solches Potentials zu erzeugen, welches in allen Raumdimensionen ein Minimum aufweist und somit ein geladenes Teilchen gefangen halten könnte. Um die Speicherung dennoch zu ermöglichen, müssen wir von einem zeitlich oszillierenden Potential ausgehen:

$$\phi = \phi_0(t) = U - V_0 \cos(\omega t)$$

Mit der Bedingung aus der Laplace-Gleichung  $\lambda + \sigma + \gamma = 0$  folgt als eine der einfachsten Lösungsmöglichkeiten  $\lambda = \sigma$ ,  $\gamma = -2\sigma$ . Verwendung von Zylinderkoordinaten, d.h.  $x^2 + y^2 = r^2$  liefert uns:

$$\phi = \phi_0 \sigma (r^2 - 2z^2)$$

Die Bewegungsgleichung des Teilchens ist gegeben mit:

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -q \nabla \phi$$

Wir setzen  $\sigma = \frac{1}{2r_0^2}$  (s. [1]) und erhalten hiermit:

$$\phi = (U - V_0 \cos(\omega t)) \frac{(r^2 - 2z^2)}{2r_0^2}$$

Mit  $\vec{E} = -\nabla \phi$  folgt für das  $\vec{E}$ -Feld in Zylinderkoordinaten (mit Hilfe von [2]):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (U - V_0 \cos(\omega t)) \frac{(r^2 - 2z^2)}{2r_0^2} \\ &= - (U - V_0 \cos(\omega t)) \left( \vec{e}_r \frac{r}{r_0^2} - \vec{e}_z \frac{2z}{r_0^2} \right) \end{aligned}$$

Dies können wir mit  $m \partial_t^2 \vec{r} = q \vec{E}$  umschreiben und in die Komponenten auftrennen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} r &= - \frac{qr}{mr_0^2} (U - V_0 \cos(\omega t)) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} z &= \frac{2qz}{mr_0^2} (U - V_0 \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Wir erkennen hierin Spezialfälle der Matthiuseischen Differentialgleichung, welche in allgemeiner Form:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) u = 0$$

mit der Koordinate  $u$  für  $r$  bzw.  $z$ , lautet. Mit der geeigneten Koordinatentransformation  $x = \frac{\omega t}{2}$  ([1]) werden die vorliegenden Konstanten  $a$  und  $q$  zu:

$$\begin{aligned} a_z = -2a_r &= -8 \frac{q}{m} \frac{U}{r_0^2} \frac{1}{\omega^2} \\ q_z = -2q_r &= -4 \frac{q}{m} \frac{V_0}{r_0^2} \frac{1}{\omega^2} \end{aligned}$$

mit  $a$  dem gleichspannungsabhängigen Koeffizienten und  $q$  dem wechselfspannungsabhängigen Koeffizienten. Mit  $\omega = 2\pi\nu$ , wobei  $\nu$  die Frequenz der anregenden Wechselspannung ist, ergeben sich als Bestimmungsgleichungen für  $a$  bzw.  $q$ :

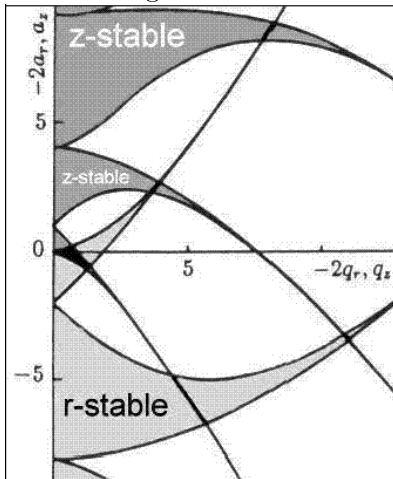
$$a_z = -2a_r = -8 \frac{q}{m} \frac{U}{r_0^2} \frac{1}{(2\pi\nu)^2} \quad (1)$$

$$q_z = -2q_r = -4 \frac{q}{m} \frac{V_0}{r_0^2} \frac{1}{(2\pi\nu)^2} \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung der Matthieschen Differentialgleichung ist gegeben mit:

$$u(x) = Ae^{\mu x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2nx} + Be^{-\mu x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{-i2nx}$$

mit den Integrationskonstanten  $A$  und  $B$ , die von den Anfangsbedingungen abhängen und  $\mu$  sowie dem Amplitudenfaktor  $C$ , welche nur von  $a$  und  $q$  abhängen. Die  $e^{\mu x}$ -Glieder stellen die Eigenfrequenz dar, während die  $e^{i2nx}$ -Glieder die harmonischen der Antriebsfrequenz  $\omega$  darstellen. Wir betrachten ob die Bahn des Teilchens stabil ist, d.h., dass  $r(t), z(t) < \varepsilon$  mit  $\varepsilon$  als Grenze. Tragen wir  $a$  über  $q$  auf, so erhalten wir ein Stabilitätsdiagramm:



Der schwarze Bereich stellt unseren ersten stabilen Bereich dar, in dem wir arbeiten werden.

## 1.2 Mie-Streuung

Die Mie-Streuung, die wir durchführen wird an einem sphärisch symmetrischen, homogenen Tröpfchen durchgeführt. Mie-Streuung ermöglicht die Strukturbestimmung des Streuzentrums, selbst wenn dessen Durchmesser in der Größenordnung der Lichtwellenlänge liegt. Aus den Maxwellgleichungen erhält man die Wellengleichungen. Man zerlegt nun die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  in einfallende Welle, Welle im Partikel und die Streuwelle. Die Verwendung von sphärischen Polarkoordinaten führt auf sechs gekoppelte Differentialgleichungen. Diese teilen wir weiter auf in zwei linear unabhängige Systeme, wobei diese die TE bzw. TM charakterisieren. Auf Grund der geforderten Stetigkeit, kommen wir über die skalare Wellengleichung zur Lösung der Wellengleichung. Diese ist durch die Ricatti-Bessel-Funktionen und die Hankelfunktionen gegeben.

Die Theorie führt uns zu der Erkenntnis, dass ein Muster bestehend aus Minima und Maxima mit verschiedenen Abständen aufgenommen werden kann, wobei diese vom Brechungsindex des Streuzentrums und dessen Durchmesser abhängig sein werden. Die theoretischen Berechnungen übernimmt für uns ein Programm, die vollständige theoretische Herleitung kann in [1] gefunden werden.

### 1.3 Thermodynamik eines verdampfenden Tropfens

Wenn ein Tropfen verdampft, kann dies durch eine Diffusion der Atome an der Oberfläche beschrieben werden. Wir erhalten für die zeitliche Radiusänderung des Tropfens:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{S}{2r} \quad (3)$$

mit dem von Temperatur und Verdampfungsdruck abhängigen Verdampfungsparameter  $S$ . Aus (3) lässt sich durch Separation der Variablen und Integration das zeitliche Verhalten des Radius bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^{R(t)} 2r \, dr &= -S \int_{t_0}^t dt \\ R(t) &= \sqrt{R_0^2 - S(t - t_0)} \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt noch  $t_0 = 0$  für den Anfangszeitpunkt, so erhalten wir als Messgleichung:

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - St} \quad (4)$$

### 1.4 Bestimmung von $\frac{Q}{m}$ für ein Teilchen in der Paulfalle

Das Verhältnis von  $\frac{Q}{m}$  kann über den Ausgleich der Gravitationskraft durch die Kraft, die aus den Gleichspannungselektroden resultiert (Coulombkraft), bestimmt werden. Es gilt im idealen Fall:

$$Q \cdot E = m \cdot g \quad (5)$$

Die Form der Elektroden ermöglicht keine genaue Berechnung des elektrostatischen Feldes, daher muss eine numerische Approximation genutzt werden, die mit:

$$E = 0,798 \cdot \frac{(U_{deckel} - U_{boden})}{2z_0}$$

gegeben ist ([3]). Umstellen von Gleichung (5) liefert:

$$\frac{Q}{m} = \frac{2gz_0}{0,798(U_{deckel} - U_{boden})}$$

Der minimale Abstand zwischen Boden- und Deckelelektrode beträgt  $2 \cdot z_0 = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ mm} \Leftrightarrow z_0 = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , während die Gravitationsbeschleunigung mit  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  gegeben ist, dies liefert die Messgleichung:

$$\frac{Q}{m} = \frac{0,0869}{(U_{deckel} - U_{boden})} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (6)$$

## 2 Versuchsaufbau und Messprinzip

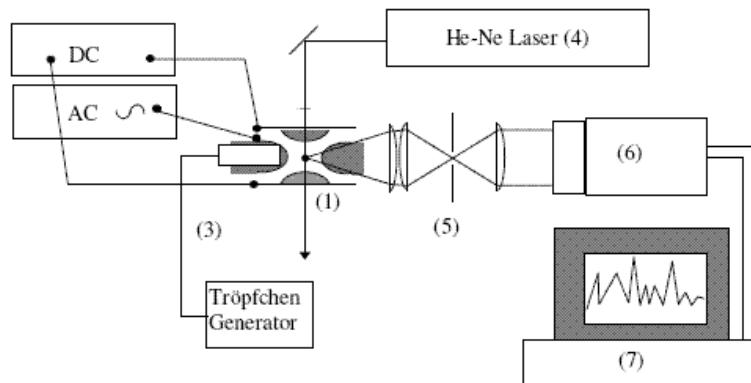
### 2.1 Quelle

Wir benutzen einen Glasstab um die Glaskügelchen in die Paulfalle einzubringen bzw. einen Aerosoltröpfchengenerator (Piezo-Injektor), dieser funktioniert ähnlich einer Tintenstrahldüse, wobei der Piezo-Injektor durch eine Spannung ein Röhrchen gefüllt mit Glykol zusammendrückt und die Tröpfchen somit in Abhängigkeit der angelegten Spannung über den inversen Piezoelektrischen Effekt in die Paulfalle beschleunigt werden. Somit kann man über die Spannung die Geschwindigkeit der Glykoltröpfchen beim "Einschiessen" regeln.

### 2.2 Detektor

Eine CCD-Kamera dient als Detektor, wobei ein Strahl, der von dem am Tröpfchen gestreuten HeNe-Laserstrahl kommt, durch ein Linsensystem auf diese gerichtet wird.

### 2.3 Versuchsaufbau



(1) ist die Paulfalle, links neben ihr befinden sich die Spannungsversorgungen, DC für den Ausgleich der Gewichtskraft und AC für die Erzeugung des Wechselfeldes. (3) stellt den Piezo-Injektor, (4) den HeNe-Laser, (5) das Linsensystem, (6) die CCD-Kamera und (7) den Computer dar.

### 2.4 Versuchsdurchführung

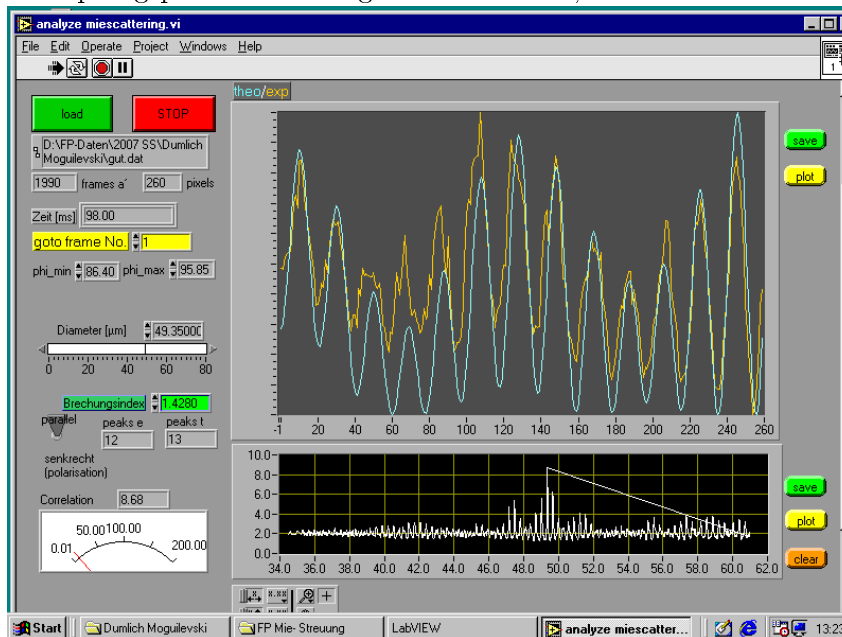
Wir führen in die Paulfalle geladene Teilchen ein, deren  $\frac{Q}{m}$ -Verhältnis wir bestimmen, indem wir die Gleichspannungsdifferenz ablesen. Ein Austesten der Grenzen der Stabilität ist durch Variation der Amplitude der Wechselspannung möglich, wobei wir die Gleichspannung für diese Betrachtung ausschalten (d.h.  $a = 0$ ), wobei wir Werte für  $q_z$  zwischen 0 und 1 erwarten. Ein weitergehendes Austesten der Grenzen ist über Variation aller Faktoren möglich, wobei hierbei  $q$  und  $a$  variiert werden. Die Beobachtung der Mie-Streuung an einem verdampfenden Tropfen wird benutzt um den Verdampfungsparameter  $S$  zu bestimmen, wobei wir die zeitliche Radiusänderung des Tropfens betrachten

können. Dies wird durch Streuung von HeNe-Laserlicht an dem Tröpfchen ermöglicht, welches von einer CCD-Kamera aufgenommen wird.

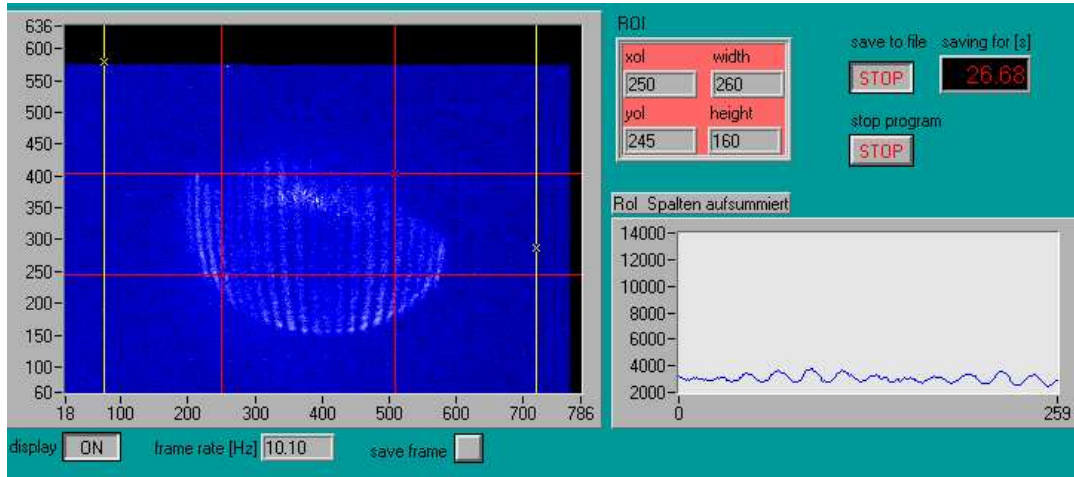
### 3 Auswertung

#### 3.1 Beschreibung der Experimente

Die Paulfalle ermöglicht es mit experimentatorischem Geschick ein Teilchen einzufangen und an diesem Mie-Streuung zu beobachten. Leider ist es schwer das Teilchen genau so zu justieren, dass es vom Laserstrahl dauerhaft getroffen wird, da immer wieder Oszillationen in der  $xy$ -Ebene auftreten können, dies kann an dem nicht-vorhandenen Vakuum oder auch an der nicht völlig stabilen Position im Stabilitätsdiagramm liegen. Durch diese Schwingungen, die man an dem hell aufleuchten und wieder abdunkeln der Mie-Streureflexe des Teilchens erkennen kann, wird unsere Messung jedoch nicht allzu stark beeinflusst, da wir uns für die Bestimmung der Verdampfungskonstanten einzelne Frames angucken und diese mit der theoretisch erwarteten Mie-Streuung vergleichen, wobei wir durch Variation des Durchmessers eine Korrelation zwischen Erwartung und Messung erhalten, wobei wir die beste Übereinstimmung wählen. Beispielhaft ein Screenshot aus dem Programm zum fitten, wobei wir eines der Tröpfchen gewählt haben (Wir haben das Tröpfchen solange beobachtet, wie es stabil beobachtbar war, jedoch existierte es nach Beendigung der Messung noch, daher kann eine Lebensdauer erst nach Bestimmung des Verdampfungsparameter  $S$  abgeschätzt werden, dies wird weiter unten geschehen):



Um eine Auswertung zu ermöglichen, haben wir den Winkelbereich für die Messung festlegen müssen, dieser wird in folgender Graphik gezeigt, welche auch Mie-Streuung an einem Tröpfchen zeigt:



Die Geometrie des Aufbaus liefert uns einen Winkelbereich von  $\phi_{min} = 90^\circ - 3,6^\circ = 86,4^\circ$  bis  $\phi_{max} = 90^\circ + 5,85^\circ = 95,85^\circ$ .

### 3.2 Bestimmung des $\frac{Q}{m}$ Verhältnisses und des $q_z$ -Wertes

Wir können mit Hilfe von (6) das  $\frac{Q}{m}$  Verhältnisse und mit Hilfe von (2) (mit  $r_0 = 5 \cdot 10^{-3} m$ ,  $V_0 = (1,9 \pm 0,2) \cdot 10^3 V$ ,  $\nu = (150 \pm 5) Hz$ ) den  $q_z$ -Wert für verschiedene Tropfen bestimmen:

Kugel	$U_{deckel}$ in V	$U_{boden}$ in V	$\frac{Q}{m}$ in $10^{-3} \frac{m^2}{Vs^2}$	$q_z$ in $10^3$
1	$(-5 \pm 1)$	$(5 \pm 1)$	$(-8,7 \pm 1,3)$	$(2,98 \pm 0,71)$
2	$(7 \pm 1)$	$(-7 \pm 1)$	$(6,2 \pm 0,7)$	$(-2,12 \pm 0,46)$
3	$(3 \pm 1)$	$(-3 \pm 1)$	$(14,5 \pm 3,4)$	$(-5,0 \pm 1,5)$
4	$(13 \pm 1)$	$(-13 \pm 1)$	$(3,3 \pm 0,2)$	$(-1,13 \pm 0,22)$
5	$(23 \pm 1)$	$(-23 \pm 1)$	$(1,90 \pm 0,06)$	$(-0,650 \pm 0,121)$
6	$(-1 \pm 1)$	$(1 \pm 1)$	$(-43 \pm 31)$	$(15 \pm 11)$

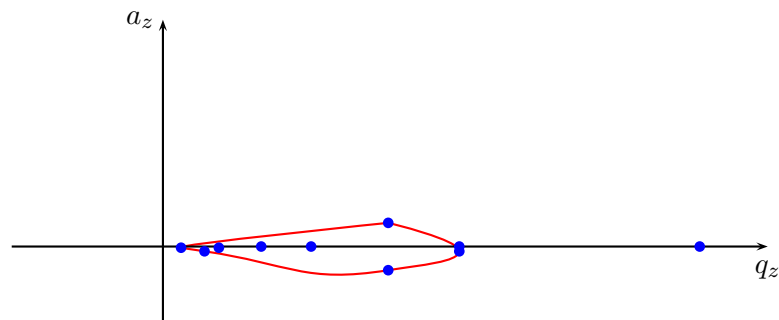
Die  $\frac{Q}{m}$  Werte liegen somit im Bereich von ca.  $(1 \text{ bis } 50) \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{Vs^2}$ .

### 3.3 Stabilitätsgrenzen

Wir haben für die erste Kugel die Stabilitätsgrenzen abgefahren und für die sechste Kugel zum Vergleich die Stabilitätsgrenzen für  $a = 0$ . Leider haben wir nicht beachtet, dass der Eingangsfehler auf Grund des  $\frac{Q}{m}$  Wertes für die sechste Kugel bereits sehr groß ist, somit sind die Werte leider für einen sinnvollen Vergleich unbrauchbar. Auch einer der  $q_z$  Werte der ersten Kugel wird verworfen, da er eindeutig ausschlägt mit 26,8, was auf die geringe Frequenz zurückzuführen ist, wobei auf Grund des nicht vorhandenen Vakuums andere stabilisierende Faktoren zu diesem hohen  $q$ -Wert geführt haben müssen. Es ergeben sich folgende Messwerte ( $\Delta V_0 = 0,2 kV$ ,  $\Delta \nu = 5 Hz$ ,  $\Delta U_b = \Delta U_d = 0,1 V$ ):

Kugel	$V_0/kV$	$\nu/Hz$	$U_d/V$	$U_b/V$	$q_z$	$a_z$
1	2,5	150	0	0	$(3,92 \pm 0,62)$	0
1	1,25	150	0	0	$(1,96 \pm 0,31)$	0
1	1,9	227	0	0	$(1,3 \pm 0,20)$	0
1	1,9	50	0	0	$(26,8 \pm 5,5)$	0
1	0,5	50	0	0	$(7,1 \pm 1,5)$	0
1	1,9	150	50	-50	$(2,98 \pm 0,47)$	$(0,313 \pm 0,050)$
1	1,9	150	-50	50	$(2,98 \pm 0,47)$	$(-0,313 \pm 0,050)$
1	0,35	150	-10	10	$(0,55 \pm 0,09)$	$(-0,063 \pm 0,010)$
1	2,5	150	-10	10	$(3,92 \pm 0,62)$	$(-0,063 \pm 0,010)$
1	1,9	300	-10	10	$(0,74 \pm 0,12)$	$(-0,0157 \pm 0,0024)$
1	0,6	300	-10	10	$(0,24 \pm 0,04)$	$(-0,0157 \pm 0,0024)$
6	1,325	150	0	0	$(10,3 \pm 7,4)$	0
6	2,5	150	0	0	$(19 \pm 14)$	0
6	2,3	70	0	0	$(82 \pm 60)$	0
6	2,3	463	0	0	$(1,9 \pm 1,4)$	0

Wie man im folgenden gemessenen Stabilitätsdiagramm für die Kugel 1 sieht, haben wir leider versäumt weitere ein bis zwei Messpunkte für positive  $a_z$  Werte aufzunehmen, so, dass nur ein Punkt zur Verfügung steht, um diesen Bereich zu beschreiben, auch das entstehende Diagramm stimmt nicht mit der Erwartung überein, wobei einige Punkte bereits herausgenommen wurde.



Dies ist mit der Durchführung des Versuchs zu begründen, die nicht sorgfältig genug war. Es hätte Stoßfreiheit, Vermeidung von Luftzug und ein Vakuum benötigt, um angemessene Ergebnisse zu erhalten, somit ist nur qualitativ verifiziert worden, dass es eine Art Stabilitätsdiagramm gibt, das grob die Form wie die Theorie sie vorraussagt besitzt. Jedoch war eine quantitative Übereinstimmung der erwarteten Werte nicht zu erreichen.

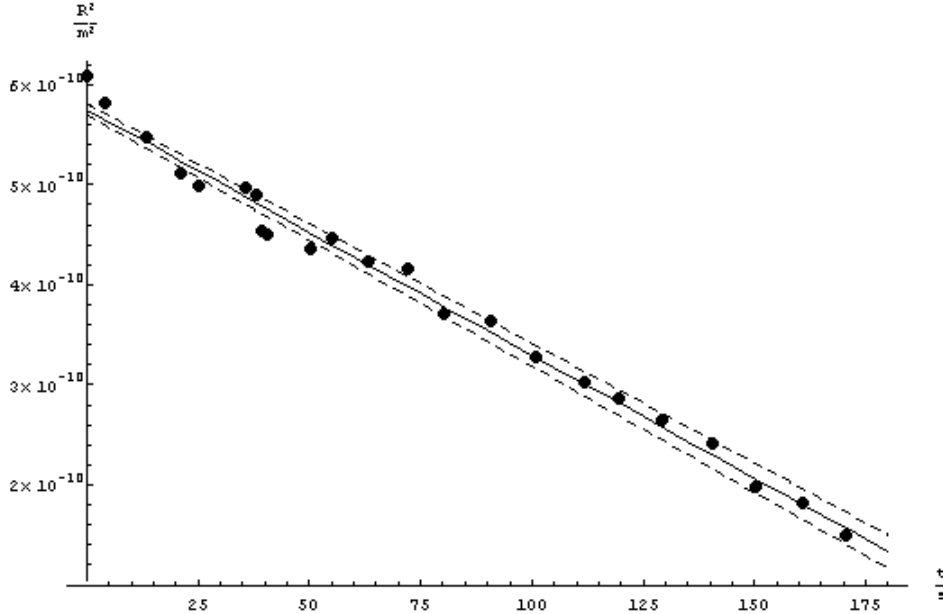
### 3.4 Bestimmung des Verdampfungsparameters $S$

Wir nehmen einen Fehler für den Kügelchenradius von  $\Delta R = 0,5 \mu m$  an (dies ist so klein, das man es auf der Graphik nicht erkennt). Der Verdampfungsparameter kann mit Hilfe von (4), d.h.  $R^2(t) = R_0^2 - S(t - t_0)$  graphisch bestimmt werden. Mit Hilfe des Verdampfungsparameters lässt sich dann die Lebensdauer des Tröpfchens über



$$t = \frac{R_0^2}{S}$$

bestimmen, wobei  $R(t) = 0$  gesetzt und umgestellt wurde. Aus dem folgenden Graphen



erhalten wir als Verdampfungsparameter  $S = (2,454 \pm 0,062) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s}$ . Wir bestimmen hieraus die Lebensdauer für unser Tröpfchen, mit dem Anfangsdurchmesser  $d_0 = (49 \pm 1) \cdot 10^{-6} m$ , d.h.  $R_0 = (24,5 \pm 0,5) \mu m$ , hieraus ergibt sich für die Lebensdauer unseres Tröpfchens ein Wert von  $t = (245 \pm 12) s$ , wobei wir für diesen Tropfen ca. 175 s annehmbare Messergebnisse durch Mie-Streuung aufnehmen konnten. Die Tropfen verdampfen somit relativ langsam, so dass über einen längeren Zeitraum problemlos an diesen Messungen vorgenommen werden können, jedoch sollte der Messbereich beschränkter gewählt werden, damit die Größenänderung sich nicht merklich auswirkt. Die Messergebnisse sind annehmbar, da die Genauigkeit für den Verdampfungsparameter, der aus der Regression ermittelt wurde, nur ca. 2,5% beträgt. Jedoch scheint die Mie-Streuung auf die Größenordnung des  $\mu m$ -Bereiches beschränkt zu sein, möchte man noch kleinere Objekte aufnehmen, scheint Mie-Streuung ungeeignet zu sein, daher deckt die Mie-Streuungsmessung den Bereich für kleine Tropfen bis zu winzigen  $\mu m$ -großen Tropfen ab.

## 4 Diskussion und Zusammenfassung

Der Versuch führt uns in die Funktionsweise der Paulfalle ein und verdeutlicht die Möglichkeiten ein Teilchen einzufangen und an diesem Beobachtungen bzw. Messungen durchzuführen. Das theoretische Stabilitätsdiagramm stimmt leider nicht mit dem von uns ermittelten überein, wobei natürlich ein fehlendes Vakuum für das theoretische Stabilitäts-

diagramm angesetzt ist und im Versuch verschiedene Einflüsse von Aussen, wie Luftzug und Stoß bzw. Wechselwirkung mit anderen Teilchen (zum Teil flogen diese in der Nähe lang und waren geladen, wodurch die Coulombkraft einen Einfluss hatte), vorhanden waren. Die Justierung erfordert einiges experimentelles Geschick, wobei der schwerste Part das Einfangen und gefangen halten eines geeigneten Tröpfchens darstellt, welches zudem noch so justiert ist, dass der Laserstrahl es dauerhaft trifft und Mie-Streuung dauerhaft beobachtbar ist. Eine kleine Oszillation kann anscheinend auf Grund des Versuchsaufbaus nicht verhindert werden, da ein Vakuum fehlt. Die Messung des Verdampfungsparameters konnte ohne größere Probleme durchgeführt werden, möglicherweise hätte ein Vergleichswert aufgenommen werden können, womit der Verdampfungsparameter verifiziert oder auch ein möglicher nicht-erkennbarer Fehler erkannt hätte werden können. Der aus der Streuung ermittelte Fehler ist mit 2,5% relativ klein, wobei wir mit Hilfe des Verdampfungsparameters  $S = (2,454 \pm 0,062) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s}$  auch die Lebensdauer des Tröpfchens bestimmen konnten, welche mit  $\tau = (245 \pm 12) s$  berechnet wurde. Dieser Wert scheint einigermaßen realistisch, da wir über das Bild der CCD-Kamera die Größenabnahme über die Zeit beobachten konnten. Mie-Streuung ermöglicht heute Aerosoltröpfchen in der Atmosphäre, aber auch Feinstaubteilchen in Großstädten zu erforschen, wobei dieses zur Verbesserung des Lebensstandards bzw. zur Erforschung des Klimas bzw. Wetters genutzt wird.

## 5 Quellen

- [1] Ulrike Busolt, Diplomarbeit "Winkelaufgelöste Beobachtung der Mie-Streuung an einzelnen Mikropartikeln", 1995
- [2] Bronstein, Taschenbuch der Mathematik, 5. Auflage
- [3] Fortgeschrittenenpraktikumsskript

## 6 Anhang

- [1] Mathematica printout
- [2] Messprotokoll