Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2008/2009 Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag, 9.12.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

Sofern bearbeitet, müssen diese Fingerübungen in den Übungsgruppen auf Aufforderung ohne Notizen vorgerechnet werden können!

(a) Geben Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen für $x \ll 1$ bis zur vierten Ordnung an:

$$f_1(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad ; \quad f_3(x) = (1+x)^{3/2}$$

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

der Funktionen $f(x,y) = xy \sin(xy)$, $f(x,y) = (x+y)^2$ und $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Aufgabe 2: Erhaltungssätze (10 Punkte)

Ein Keil (Masse M) mit Neigungswinkel α bewegt sich reibungsfrei auf einer horizontalen Oberfläche. Auf dem Keil rutscht ein würfelförmiger Klotz (Masse m) reibungsfrei herunter. Anfangs seien Klotz und Keil in Ruhe. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes (im Inertialsystem), nachdem dieser vertikal um die Höhe h gefallen ist.

Aufgabe 3: Wasserrutsche (10 Punkte)

In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und drei volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ in einem geeignet gewählten Koordinatensystem. (Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.)

Aufgabe 4: Elliptische Integrale – Fortsetzung (10 Punkte)

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte X, für deren Abstände von den zwei Brennpunkten A und B

$$\overline{XA} + \overline{XB} = \text{konst.}$$

gilt. Analog ist die Lemniskate durch

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = a^2$$

definiert. Zeigen Sie zunächst, dass die Lemniskate in kartesischen Koordinaten durch

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

sowie in Polarkoordinaten durch

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

beschrieben wird, wenn die Brennpunkte bei $(\pm a, 0)$ liegen. Skizzieren Sie die Lemniskate. Zeigen Sie, dass sich ihr Umfang durch das vollständige elliptische Integral zweiter Art

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

mit $K^2 = 1/2$ dargestellt werden kann.