

Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2008/2009 Blatt 3

Abgabetermin: Dienstag, 04.11.2008, *Anfang* der Vorlesung (d.h. spätestens 10:15)

Aufgabe 1: Fingerübungen (3+3+4 Punkte)

Sofern bearbeitet, müssen diese Fingerübungen in den Übungsgruppen auf Anforderung ohne Notizen vorgerechnet werden können!

Betrachten Sie die x -abhängigen Vektoren

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \quad \frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}] \quad \frac{d}{dx}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$$

(b) die Spatprodukte

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

(c) die Integrale

$$\int dx \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \int dx \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \int dx \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Aufgabe 2: Polarkoordinaten (5+5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden ebenen Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ die Polarkoordinaten $r(t)$ sowie $\varphi(t)$ an. Drücken Sie außerdem die Geschwindigkeit und die Beschleunigung mit Hilfe der Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ aus.

(a)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ at^2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ bt \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Pendel und mehr (3+3+4 Punkte)

- (a) Drücken Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ des Pendels mit Hilfe des Auslenkwinkels φ und seiner Zeitableitungen aus.
- (b) Ebenso für die potentielle Energie des Pendels.
- (c) Wie (a), nur für eine allgemeine ebene Bewegung mit Hilfe der Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$.

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten (2+2+2+2+2 Punkte)

Allgemeine dreidimensionale Bewegungen können in Kugelkoordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

wobei r, θ und φ zeitabhängig sind. Hierzu ist es hilfreich, die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu definieren.

- (a) Zeigen Sie, dass die so definierten Vektoren tatsächlich Einheitsvektoren sind und senkrecht aufeinander stehen.
- (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$.
- (c) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten die Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

annimmt.

- (d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

- (e) Geben Sie einen Ausdruck für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten an.