Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2008/2009 Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag, 6.1.2009, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (6+2+2 Punkte)

Sofern bearbeitet, müssen diese Fingerübungen in den Übungsgruppen auf Aufforderung ohne Notizen vorgerechnet werden können!

(a) In der Vorlesung haben wir ausgenutzt (3. Keplersches Gesetz), dass die Fläche einer Ellipse gegeben ist durch $F = \pi ab$. Beweisen Sie diese Aussage.

(b) Betrachten Sie eine Kurve auf der (kugelförmigen) Erdoberfläche, die vom Nordpol entlang eines Längengrads zum Äquator führt, dann ein Viertel des Erdumfangs entlang des Äquators zurücklegt und schließlich wieder entlang eines Längengrads zum Nordpol zurückkehrt. Geben Sie den eingeschlossenen Raumwinkel an.

(c) Betrachten Sie den 52. Breitengrad auf der Nordhalbkugel. Welchem Raumwinkel entspricht die eingeschlossene Fläche, die den Nordpol enthält.

Aufgabe 2: Lenzscher Vektor (5 + 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Lenzsche Vektor

$$\mathbf{G} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - GmM\frac{\mathbf{r}}{r}$$

für das Gravitationspotential eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Zeigen Sie, dass Sie aus der Konstanz des Lenzschen Vektors unmittelbar die Ellipsenbahn herleiten können, indem Sie den Lenzschen Vektor skalar mit dem Ortsvektor des Planeten multiplizieren.

Aufgabe 3: Wirkungsquerschnitt für die Rutherfordstreuung (10 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass Stoßparameter und Streuwinkel bei der Rutherfordstreuung über

$$b = \frac{GM}{v_\infty^2}\cot\frac{\theta}{2}$$

zusammenhängen. Berechnen Sie hieraus den Wirkungsquerschnitt für die Rutherfordstreuung. (Sie dürfen hier mit den Konstanten des Keplerproblems weiterrechnen, können aber auch versuchen, die gesamte Rechnung noch einmal durchzugehen, um die tatsächlichen Konstanten des Rutherfordproblems zu erhalten.)

Aufgabe 4: Kepler-Problem und Energieerhaltung (2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung die Radialgleichung

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

mit Hilfe eines kleinen Tricks gelöst. Andererseits entspricht diese effektiv der Bewegungsgleichung eines eindimensionalen Problems mit der einzigen Koordinate r, wobei die rechte Seite der Gleichung proportional zu einer effektiven Kraft ist. Wir können dieses Problem also auch mit Hilfe des allgemeinen Lösungswegs für eindimensionale konservative Probleme lösen.

(a) Finden Sie einen Ausdruck für die zur effektiven Kraft gehörende potentielle Energie $V_{\text{eff}}(r)$.

(b) Finden Sie mit Hilfe der Energieerhaltung eine implizite Lösung für die Funktion $r = r(t)$. (Sie brauchen hier das auftretende Integral nicht zu lösen.)

(c) Schreiben Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung die implizite Lösung für $r = r(t)$ in eine implizite Lösung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ um.

(d) Berechnen Sie (*nicht* äquivalent zu: Nachschlagen) das in der impliziten Lösung für die Bahnkurve auftretende Integral und zeigen Sie auf diese Weise, dass die gesuchte Bahnkurve eine Ellipse ist.

Zusatzaufgabe: Kegelschnitte (KEINE Punkte)

Klassifizieren Sie die Schnittkurven eines Kegels

$$x^2 + y^2 = z^2$$

mit beliebigen Ebenen. Je nach Ebene sollten Sie Kreise (Normalform $x^2 + y^2 = R^2$), Ellipsen (Normalform $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), Hyperbeln ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$) oder Parabeln ($y = ax^2 + bx + c$) finden.