§2 Quantisierung eines skalaren Feldes

Das Ziel ist eigentlich das elektromagnetische Feld zu *quantisieren*, aber wie man schon an den MAXWELLschen Gleichungen sehen kann, ist es zu kompliziert, um damit zu beginnen. Außerdem kann man als skalares Feld dasjenige wählen, das mit der KLEIN–GORDON Gleichung beschrieben wird

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi \;=\; \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\Phi - \left(\frac{m\,c}{\hbar}\right)^2 \Phi \;. \tag{4}$$

Es ist sicherlich viel einfacher als die Vektorfelder der Elektrodynamik, aber trotzdem relativistisch invariant. Damit der Ansatz $\Phi = \Phi_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{x}) - i\,\omega\,t)$ die Gleichung (4) löst, muß gelten, daß $\omega^2 = c^2\vec{k}^{\,2} + (m\,c^2/\hbar)^2$ ist. Es entspricht der relativistischen Beziehung zwischen Energie $E = \hbar\,\omega$ und Impuls $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$, d.h. es gilt $E^2 = c^2\,\vec{p}^{\,2} + (m\,c^2)^2$. Dies war in den vorigen Abschnitten über relativistische Erweiterung der SCHRÖDINGER der Ausgangspunkt.

Um die Quantenmechanik ins Spiel zu bringen, separiert man die Zeitabhängigkeit von der Ortsabhängigkeit. Eine allgemeine Lösung findet man als Summe vieler solche Beiträge

$$\Phi(\vec{r},\,t) = \sum_n q_n(t)\,\phi_n(\vec{r}) \tag{5}$$

Man muß verlangen, daß die $\phi_n(\vec{r})$ Lösungen der HEMHOLTZgleichung

$$(\,\Delta \,+\, k_n^2\,)\,\phi_n(\vec{r}) \;=\; 0 \tag{6a}$$

sind. Dann gilt für die $q_n(t)$

$$\ddot{q} \,+\, \omega_n^2\,q_n \,=\, 0 \quad \text{mit} \quad \omega_n = c\left[\,k_n^2 + (m\,c/\hbar)^2\,\right]^{1/2} \tag{6b}$$

Der weiter oben erwähnte Ansatz mit ebenen Wellen passte auch in diese Schema. Der Einfachheit wegen sollen jedoch die $\phi_n(\vec{r})$ reell sein. Die ϕ_n sollen ein orthogonales und vollständiges System von Funktionen bilden mit

$$\int \phi_m(\vec{r})\,\phi_n(\vec{r})\,d^{\,3}r \;=\; \delta_{m,n} \quad \text{und} \quad \sum_n \phi_n(\vec{r})\,\phi_n(\vec{r}\,') \;=\; \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\;. \tag{7}$$

Mit der Zerlegung (5) in *Normal*schwingungen ist der Übergang zur Quantenmechanik einfach: jede Schwingung des zunächst klassischen Feldes wird in einen quantenmechanischen Oszillator verwandelt. Statt (6b) kann man

$$\dot{q}_n \;=\; p_n \tag{8a}$$

$$\dot{p}_n \;=\; -\omega_n^2\,q_n \tag{8b}$$

schreiben und die zugehörige HAMILTONfunktion

$$\mathcal{H}_n \;=\; \tfrac{1}{2}\left(p_n^2 \,+\, \omega_n^2\,q_n^2\right) \tag{9}$$

notieren. Die üblichen Regel $[\,q_n,\,p_n\,] \;=\; i\,\hbar$ macht $\mathcal{H}_n$ zum HAMILTONoperator. Die Operatoren verschiedener Normalschwingungen vertauschen natürlich, z.B. $[\,q_n,\,p_m\,] \;=\; 0$ für $n \neq m$. Das bedeutet auch, daß man die HAMILTONoperatoren $\mathcal{H}_n$ einfach als Summe zusammenfassen kann

$$\mathcal{H} \;=\; \sum_n \mathcal{H}_n\;. \tag{10}$$

Was noch zu tun bleibt, ist $\mathcal{H}_n$ durch Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren zu vereinfachen. Mit dem Ansatz für harmonische Oszillatoren

$$b_n = \frac{\omega_n\, q_n + i\, p_n}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega_n}} \tag{11a}$$

$$b_n^\dagger = \frac{\omega_n\, q_n - i\, p_n}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega_n}} \tag{11b}$$

der die Vertauschungsrelation

$$\left[\, b_n,\, b_n^\dagger \,\right] = 1 \tag{12}$$

zur Folge hat ist

$$\mathcal{H}_n = \hbar\,\omega_n \big(\, b_n^\dagger\, b_n \,+\, \tfrac{1}{2} \,\big) \ . \tag{9'}$$

Summiert man die Beiträge aller Oszillatoren nach (10), so ist man an derselben *Stelle*, die mit der PLANCKschen Strahlungsformel (1) markiert ist. Dort wurde angenommen, daß jeder Oszillator zur Energie der Strahlung beiträgt. Hier ist der n-te Oszillator im Zustand $\mathrm{n}_n = 0,\, 1,\, 2\, \ldots$

$$E_{gesamt} = \sum_n \hbar\,\omega_n \big(\, \mathrm{n}_n + \tfrac{1}{2} \,\big) \tag{13}$$

und dort wurden die Beiträge zur Energie thermisch gemittelt. Der zu (13) gehörende Eigenvektor hat die Form

$$|\, \mathrm{n}_1,\, \mathrm{n}_2,\, \ldots\, \mathrm{n}_n\, \ldots \rangle \;=\; \prod_n \tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{n}_n!}} \, \big(\, b_n^\dagger \big)^{\mathrm{n}_n} \, |\, 0\, \rangle \ , \tag{14}$$

wobei $|\, 0\, \rangle$ für den Vakuumzustand steht, bei dem alle n_n Null sind.

Man kann jedoch einen Schritt weiter gehen, und Φ mit Hilfe von (5) durch Operatoren ausdrücken. Gl.(11*a*) und (11*b*) umgestellt ergibt zunächst

$$q_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\, \big(b_n \,+\, b_n^\dagger\big) \tag{15a}$$

$$p_n = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_n}{2}}\, \big(b_n \,-\, b_n^\dagger\big) \ . \tag{15b}$$

Statt (5) ist der *Feld*operator Φ damit

$$\Phi(\vec{r},\, t) = \sum_n \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\; \phi_n(\vec{r}) \big(b_n \,+\, b_n^\dagger\big) \ . \tag{5}$$

Die Zeitabhängigkeit ist in der Zeitabhängigkeit der Vernichtungsoperatoren b_n und Erzeugungsoperatoren $b_n^\dagger$ verborgen. Mit Hilfe der HEISENBERGschen Bewegungsgleichung und $\mathcal{H}_n$ von (9′)

$$\frac{d}{dt}\, b_n^\dagger \;=\; \frac{1}{i\,\hbar} \big[\, b_n^\dagger,\, \mathcal{H}_n \,\big] \;=\; i\,\omega\, b_n^\dagger \quad \Rightarrow \quad b_n^\dagger(t) = b_n^\dagger\, \mathrm{e}^{i\,\omega_n t} \ , \quad b_n = b_n\, \mathrm{e}^{-i\,\omega_n t} \tag{16}$$

findet man die Zeitabhängigkeit von $b_n^\dagger$ und die von b_n. Letztere, weil es sich um den adjungierte Operator handelt, so daß die Frequenz ω_n das Vorzeichen ändert.

Mit dieser Interpretation der KLEIN–GORDON Gleichung ist man das Problem mit den Lösungen negativer Frequenz und damit zusammenhängend der indefiniten Metrik los. Wie immer, handelt man sich *neue* ein: die Grundzustandsenergie nach (13) ist selbst mit allen $\mathrm{n}_n = 0$ unendlich groß!

Formelle Quantisierung

Die explizite Konstruktion eines *Quanten*feldes, die sich mit dem Gebrauch der Normalschwingungen ϕ_n von Gl.(6) eng an die Hohlraumstrahlung anlehnt, kann durch eine Feldquantisierung im eingentlichen Sinne ergänzt werden. Ausgangspunkt ist die Mechanik, die mit den Namen von LAGRANGE und HAMILTON verknüpft ist.

Man definiert eine LAGRANGEdichte L, die über das Gebiet, in dem man das Wellenfeld Φ betrachten will, integriert wird, damit sich eine LAGRANGEfunktion $\mathcal{L}$ im eigentlichen Sinn ergibt:

$$L \equiv L(\Phi, \partial\Phi/\partial x_k, \dot{\Phi}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \int L\, d^3r \tag{17}$$

Die Wirkung S ist dann wie üblich definiert

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, dt \ , \tag{18}$$

so daß man eigentlich die LAGRANGEdichte L über ein vierdimensionales Gebiet integriert. Das Prinzip der kleinsten Wirkung verlangt $\delta S = 0$ und gibt die Bewegungsgleichungen, wenn man zusätzlich fordert, daß $\delta\Phi(t_0) = \delta\Phi(t_1) = 0$ ist. Nach den üblichen Manipulationen findet man

$$\delta S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial L}{\partial(\partial\Phi/\partial x_k)} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0\ . \tag{19}$$

Damit dies die KLEIN–GORDONgleichung (4) ist, muß die LAGRANGEdichte folgende Gestalt haben

$$L_{KG} = \tfrac{1}{2}\left[\dot{\Phi}^2 - c^2(\nabla\Phi)^2 - (\tfrac{m\,c^2}{\hbar})^2\,\Phi^2\right]\ . \tag{20}$$

Man erkennt leicht, die Struktur $T - V$ aus der Punktmechanik wieder. Wie dort ist die kinetische Energie*dichte* $\frac{1}{2}\,\dot{\Phi}^2$ und die potentielle Energie*dichte* $\frac{\kappa}{2}\,\Phi^2$ ergänzt durch einen elastischen Teil $\frac{c^2}{2}\,(\nabla\Phi)^2$, der dafür *sorgt*, daß Wellen sich ausbreiten können.

Für die Quantenmechanik ist die HAMILTONfunktion wichtig. Die zum Feld Φ konjugierte Größe, formell der „Impuls"

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \tag{21}$$

Die HAMILTONfunktion $\mathcal{H}$ ist damit

$$\mathcal{H} = \int \Pi\,\dot{\Phi}\,d^3r - \mathcal{L} \tag{22a}$$

oder die Energiedichte H

$$H = \Pi\,\dot{\Phi} - L \tag{22b}$$

Aus der LAGRANGEdichte (20) ist mit (21) der konjugierte Impuls $\Pi = \dot{\Phi}$ die HAMILTONfunktion

$$\mathcal{H}_{KG} = \tfrac{1}{2}\int\left[\Pi^2 + c^2(\nabla\Phi)^2 + (\tfrac{m\,c^2}{\hbar})^2\,\Phi^2\right] d^3r\ . \tag{23}$$

Die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial \Pi} \ , \qquad \dot{\Pi} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} \tag{24}$$

ergeben nichts Neues und schließen diesen Exkurs in die formelle Kontinuummechanik ab.

Die Quantisierung lassen sich einfach übertragen. Impuls $\Phi(\vec{r})$ und Feld $\Pi(\vec{r}')$ vertauschen, wenn $\vec{r} \neq \vec{r}'$ sind, wenn sie gleich sind gibt es einen Beitrag $i\,\hbar$. Diese Aussage hat jedoch nur einen Sinn, wenn die Positionen nur diskrete Werte annehmen können. Bei einem Kontinuum tritt eine δ–Funktion stattdessen auf. Es sollte die folgenden Vertauschungsrelationen gültig sein

$$\begin{gathered} \big[\,\Phi(\vec{r}),\,\Pi(\vec{r})\,\big] \;=\; i\,\hbar\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\;, \\ \big[\,\Phi(\vec{r}),\,\Phi(\vec{r})\,\big] \;=\; 0 \quad , \qquad \big[\,\Pi(\vec{r}),\,\Pi(\vec{r})\,\big] \;=\; 0\;. \end{gathered} \tag{25}$$

Formell lassen sich die erfüllen, wenn man Funktionalableitungen benutzt

$$\Pi(\vec{r}) \;=\; \frac{\hbar}{i}\,\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{r})}\;. \tag{26}$$

Besser ist es eine *Darstellung* für die Funktionalableitung zu finden. Mit dem Ansatz analog zu (5)

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_n q_n\,\phi_n(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{r})} = \sum_n \phi_n(\vec{r})\,\frac{\partial}{\partial q_n} \tag{27}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\Big[\,\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{r})}\,,\,\Phi(\vec{r}')\,\Big] \;=\; \sum_n \phi_n(\vec{r})\,\phi_n(\vec{r}') \;=\; \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{28}$$

in der Tat eine δ–Funktion für den Kommutator herauskommt. Vorausgesetzung ist die Vollständigkeit des Funktionensystems der ϕ_n.

Die formelle Feldquantisierung führt also zu denselben Ergebnissen, wie sie sich der Normalkoordinaten von Anfang an bediente, aber hier ist das Funktionensystem noch frei wählbar. Allerdings wenn Φ von G. (27) und Π von Gl.(26) in den Hamiltonoperator (23) einsetzt und verlangt, daß man statt des Integrals über den Raum eine Summe ungekoppelter quantenmechanischer Oszillator sich ergibt,

$$\mathcal{H}_{KG} \;=\; \sum_n \frac{1}{2}\left[-\hbar^2\,\frac{\partial^2}{\partial q_n^2} \;+\; \omega_n^2\,q_n^2\right] \tag{23$'$}$$

dann müssen die ϕ_n der Helmholtzgleichung wie in (6) genügen. Dies ist leicht zu sehen, wenn durch partielle Integration den Gradienten–Term in (23) umformt: $c^2 \int (\nabla\Phi)^2\,d^3r = -c^2 \int \Phi\,\nabla^2\Phi$.

Die Umschreibung auf Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren mit (11) oder (15) ergibt für das in (26) und (27) definierten Π

$$\Pi(\vec{r},\,t) = \frac{1}{i}\sum_n \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_n}{2}}\;\phi_n(\vec{r})\big(b_n \;-\; b_n^\dagger\big)\;. \tag{29}$$

Es entspricht der Darstellung von Φ in Gleichung (5) mit $\Pi = \dot{\Phi}$.

Komplexe Basis

Eigentlich sollte das Klein–Gordon Feld Φ komplex sein. Mit einer komplexen Basis gilt statt (7)

$$\int \phi_m^*(\vec{r})\,\phi_n(\vec{r})\,d^3r \;=\; \delta_{m,n} \quad \text{und} \quad \sum_n \phi_n^*(\vec{r})\,\phi_n(\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\;. \tag{30}$$

Ebene Wellen z.B. $\phi_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\,\mathrm{e}^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}$ normiert in einem Kubus mit Volumen $V = L^3$ und mit dem Wellenvector $\vec{k} = 2\,\pi\,(n_1,\, n_2,\, n_3)/L$ bilden solch eine *komplexe* Basis, die mit $n_i = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots$ nummeriert werden könnte. Statt (5) und (29) erhält man die plausiblen Verallgemeinerungen

$$\Phi(\vec{r},\, t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{n}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\; \big(\mathrm{e}^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}} \,+\, \mathrm{e}^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}}^{\dagger}\big) \tag{31a}$$

$$\Pi(\vec{r},\, t) \;=\; \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{n}} \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_n}{2}}\; \big(\mathrm{e}^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}} \,-\, \mathrm{e}^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}}^{\dagger}\big)\ . \tag{31b}$$

Man prüft leicht nach, daß mit dieser Konstruktion die Feldoperatoren Φ und Π *hermitesch* sind und daß die Vertauschungsrelation (25) gültig bleibt. Der wesentliche Punkt ist, daß der Erwartungswert des Feldes Φ wegen der Hermizität trotz der komplexen Basis reell bleibt. Es ist klar, daß die anderen Formeln für das reelle Basis sich auf eine komplexe Basis entsprechend adaptieren lassen.

Komplexe Felder und Ladungen

Ein interessanterer Frage ist, was kann man mit einem wirklich komplexen Feld beschreiben? Es ist naheliegend, das KLEIN–GORDON für die spinlosenen π–Mesonen zu verwenden. Aber es gibt davon drei, nämlich das positiv geladene π^+, das neutrale π^0 und das negative π^-. Die geladenen π–Mesonen sind etwas 237-mal schwerer als Elektronen. Ihre Masse ist genauer $m_{\pi^\pm} = 273{,}27\, m_e$ und die Masse des neutralen ist mit $m_{\pi^0} = 264{,}37\, m_e$ etwas kleiner. Der Spin dieser Teilchen ist Null. Die Idee ist also diese drei Teilchen mit einer gemeinsamen KLEIN–GORDON zu beschreiben und den Massenunterschied zu ignorieren*.

Man macht den folgenden Ansatz mit drei reellen Feldern $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(3)}$ und faßt die beiden ersten zu einem komplexen Feld zusammen

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r},\, t) \;&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\big(\Phi_1(\vec{r},\, t) \,+\, i\,\Phi_2(\vec{r},\, t)\big) \\ \Phi^*(\vec{r},\, t) \;&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\big(\Phi_1(\vec{r},\, t) \,-\, i\,\Phi_2(\vec{r},\, t)\big) \end{aligned} \tag{32}$$

Die LAGRANGEfunktion von der Form (20) müßte nun eine Summe der drei Felder $\Phi^{(l)}$ sein. Mit der Zusammenfassung von $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ zu einem komplexen Feld sind es nur noch zwei Beiträge

$$L_\pi \;=\; \tfrac{1}{2}\,\big[\,\dot{\Phi}^*\dot{\Phi} \,-\, c^2\,\nabla\Phi^*\nabla\Phi \,-\, (\tfrac{m_\pm\, c^2}{\hbar})^2\,\Phi^*\Phi \,+\, \dot{\Phi}_3^*\,\dot{\Phi}_3 \,-\, c^2\,\nabla\Phi_3^*\,\nabla\Phi_3^* \,+\, (\tfrac{m_0\, c^2}{\hbar})^2\,\Phi^*\Phi\,\big]\ . \tag{33}$$

Es sind jedoch nicht Einsparungsgründe, für die die komplexe Notation vorteilhaft ist, sondern die *Eich*invarianz, die dadurch sichtbar wird. Die LAGRANGEfunktion (33) ändert sich nicht, wenn

$$\begin{aligned} \Phi \;&\to\; \mathrm{e}^{i\,\alpha}\,\Phi \\ \Phi^* \;&\to\; \mathrm{e}^{-i\,\alpha}\,\Phi^* \\ \Phi_3 \;&\to\; \Phi_3 \end{aligned} \tag{34}$$

ist, d.h. das komplexe Feld Φ mit einem Phasenfaktor $\mathrm{e}^{i\,\alpha}$ multipliziert wird. Invarianzen der LAGRANGEfunktion gegenüber Transformationen haben *Erhaltungsgesetzte* zur Folge.

---

* Alle drei Teilchen sind instabil: die geladenen zerfallen in $2.6\,10^{-8}$ sec durch $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu$ und $\pi^0 \to 2\,\gamma$ in $<10^{-17}$ sec.

Hier ist es die Ladung. Entwickelt man $e^{\pm i\,\alpha} \approx 1 \pm i\,\alpha$ für kleine α, dann lassen sich die Transformationen (34) folgendermaßen vereinfachen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\to \quad \Phi_1 \,+\, \alpha\,\Phi_2 \\ \Phi_2 &\to -\alpha\,\Phi_1 \,+\, \Phi_2 \\ \Phi_3 &\to \quad \Phi_3 \;. \end{aligned} \tag{34$'$}$$

so daß man erkennen kann, daß diese *Eich*transformation formal einer kleinen Drehung um die dritte *Achse* in einem Koordinatensystem bedeutet, das von den drei Kompononenten $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(3)}$ gebildet wird. Die nächste Frage ist, welche Form hat der *Drehimpuls*operator, der die Eichtransformation (34) bzw. $(34)'$ erzeugt?

Man nennt diese Größen *Isotopen*spin $\vec{T}$ und kann erraten, daß die dritte Komponente die Form

$$T_3 \;=\; \int \big\{ \Phi_1(\vec{r},\,t)\,\Pi_2(\vec{r},\,t) \;-\; \Phi_2(\vec{r},\,t)\,\Pi_1(\vec{r},\,t) \big\}\, d^{\,3}r \tag{35}$$

hat. Der zum Feld Φ_l konjugierte *Impuls* Π_l ist $\partial L/\partial\dot{\Phi}_l = \Pi_l$, wobei mit der Lagrangedichte (33) $\Pi_l = \dot{\Phi}_l$ ist. Allerdings ist quantisiert der konjugierte *Impuls* analog zu Gl.(26)

$$\Pi_l(\vec{r}) \;=\; \frac{\hbar}{i}\,\frac{\delta}{\delta\Phi_l(\vec{r})} \;. \tag{36}$$

mit den *kanonischen* Kommutationsregeln

$$\big[\,\Pi_l(\vec{r})\,,\;\Phi_{l'}(\vec{r}')\,\big] \;=\; \frac{\hbar}{i}\,\delta_{ll'}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{37}$$

Die *Erzeugende* einer Drehung T_3 sollte die Transformationen (34) mit

$$e^{-i\,\alpha\,T_3/\hbar}\,\Phi_1\,e^{\;i\,\alpha\,T_3/\hbar} \;\approx\; \Phi_1 \;-\; \tfrac{i\,\alpha}{\hbar}\,[\,T_3,\,\Phi_1\,] \;=\; \Phi_1 \,+\, \alpha\,\Phi_2 \tag{34$''$}$$

erzeugen, was offensichtlich der Fall ist, wie der Vergleich mit der ersten Zeile von $(34')$ zeigt.

Bleibt noch zu zeigen, daß T_3 bis auf einen Faktor die Eigenschaft hat Ladungen zu zählen. Benutzt man die $(31a)$ für die beiden reellen Felder Φ_1 und Φ_2 und $(31b)$ für die dazu *konjugierten* Felder Π_1 und Π_2 dann erhält man statt (35)

$$\begin{aligned} T_3 \;=\; &-\frac{i}{V}\int d^{\,3}r \left\{ \sum_{\vec{n}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\; e^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\,\big(b^{(1)}_{\vec{n}} \;+\; b^{(1)\dagger}_{-\vec{n}}\big) \right\} \left\{ \sum_{\vec{n}'} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n'}}{2}}\; e^{-i\,\vec{k}_{n'}\cdot\vec{r}}\,\big(b^{(2)}_{-\vec{n}'} \;-\; b^{(2)\dagger}_{\vec{n}'}\big) \right\} \\ &+\frac{i}{V}\int d^{\,3}r \left\{ \sum_{\vec{n}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\; e^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\,\big(b^{(2)}_{-\vec{n}} \;+\; b^{(2)\dagger}_{\vec{n}}\big) \right\} \left\{ \sum_{\vec{n}'} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{n'}}{2}}\; e^{i\,\vec{k}_{n'}\cdot\vec{r}}\,\big(b^{(1)}_{\vec{n}'} \;-\; b^{(1)\dagger}_{-\vec{n}'}\big) \right\} \end{aligned}$$

und man sieht sofort, daß durch die Integration über den Raum die Doppelsummation über $\vec{n}$ und $\vec{n}'$ wegen $\vec{n} = \vec{n}'$ zur einer Summation wird. Außerdem wird der Ausdruck viel einfacher

$$\begin{aligned} T_3 \;&=\; -\frac{i\,\hbar}{2}\sum_{\vec{n}} \Big\{ \big(b^{(1)}_{\vec{n}} \;+\; b^{(1)\dagger}_{-\vec{n}}\big)\big(b^{(2)}_{-\vec{n}} \;-\; b^{(2)\dagger}_{\vec{n}}\big) \;-\; \big(b^{(2)}_{-\vec{n}} \;+\; b^{(2)\dagger}_{\vec{n}}\big)\big(b^{(1)}_{\vec{n}} \;-\; b^{(1)\dagger}_{-\vec{n}}\big) \Big\} \\ &=\; -i\,\hbar\sum_{\vec{n}} \big(\, b^{(1)\dagger}_{-\vec{n}}\, b^{(2)}_{-\vec{n}} \;-\; b^{(2)\dagger}_{\vec{n}}\, b^{(1)}_{\vec{n}} \,\big) \end{aligned} \tag{35$'$}$$

Benutzt man die Definition von (32) zusammen mit der gerade praktizierten Umschreibung auf Erzeugungs– und Vernichtsoperatoren, dann nimmt Φ die folgende Gestalt an:

$$\Phi(\vec{r},\,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{n}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\;\Big\{\mathrm{e}^{\,i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\;\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)}\;+i\,b_{\vec{n}}^{(2)}\;)\;+\;\mathrm{e}^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\;\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)\dagger}+i\,b_{\vec{n}}^{(2)\dagger})\Big\} \tag{32$'$}$$

Dieser Operator erzeugt mit $(b_{\vec{n}}^{(1)\dagger}+i\,b_{\vec{n}}^{(2)\dagger})/\sqrt{2}$ ein positives π–Meson und mit $(b_{\vec{n}}^{(1)}\;+i\,b_{\vec{n}}^{(2)}\;)/\sqrt{2}$ vernichtet er ein negatives π–Meson. Entsprechend erzeugt Φ^* negative Mesonen und vernichtet positive. Mit diesen Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren ist dann schließlich

$$\begin{aligned} T_3/\hbar \;&=\; \sum_{\vec{n}}\Big\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)\dagger}+i\,b_{\vec{n}}^{(2)\dagger})\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)}\;-i\,b_{\vec{n}}^{(2)}\;)\;-\;\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)\dagger}-i\,b_{\vec{n}}^{(2)\dagger})\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(b_{\vec{n}}^{(1)}\;+i\,b_{\vec{n}}^{(2)}\;)\Big\} \\ &=\; N_+\;-\;N_-\;. \end{aligned} \tag{35$''$}$$

Bis auf einen Faktor $e/\hbar$ ist damit die dritte Komponente des Isospins T_3 gleich der Ladung, d.h. gleich der Differenz zwischen der Anzahl positiver und negativer π–Mesonen.

Vergleich mit der Klein–Gordon Gleichung

Kehrt man zu den komplexen Feldern (32) zurück, dann nimmt (35) die folgende Form an

$$T_3 \;=\; i\int\big(\,\partial_t\Phi^*\cdot\Phi\;-\;\Phi^*\cdot\partial_t\Phi\,\big)\,d^3r \tag{35$'''$}$$

so daß mit (35$'''$) auch eine Ladungsdichte

$$\rho \;=\; i\,\frac{e}{\hbar}\,\big(\,\partial_t\Phi^*\cdot\Phi\;-\;\Phi^*\cdot\partial_t\Phi\big) \tag{37a}$$

definiert ist. Der dazugehörige Strom $\vec{j}$ ist

$$\vec{j} \;=\; i\,\frac{e\,c^2}{\hbar}\,\big(\,\nabla\Phi^*\cdot\Phi\;-\;\Phi^*\cdot\nabla\Phi\,\big)\;. \tag{37b}$$

Der zusätzliche Faktor c^2 ist notwendig, damit die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\,\rho+\nabla\,\vec{j}=0$ erfüllt ist. Dies ist leicht nachzuprüfen, denn die Klein–Gordon Gleichung $\partial_t^2\,\Phi \;=\; c^2\nabla^2\,\Phi-(m\,c^2/\hbar)^2\,\Phi$ gilt sowohl für Φ als auch für Φ^*.

Die Kontinuitätsgleichung galt auch für die *unquantisierte* Klein–Gordon Gleichung. Dort stieß aber die Interpretation von ρ der Gl.(37a) als Wahrscheinlichkeitsdichte auf Kritik, weil ρ auch negativ sein konnte. Als Ladungsdichte ist dies jedoch möglich. Die Normierungen waren auch anders gewählt, damit im nichtrelativistischen Grenzfall die Ausdrücke für ρ und $\vec{j}$ wie bei der Schrödingergleichung sind. Eingeschränkt auf die Einteilchenzustände für das komplexe Feld Φ nach Gl.(32$'$) oben, verwandelt das Quadrat des Faktor $\sqrt{\hbar/(2\,\omega_n)}\approx\sqrt{\hbar^2/(2\,m\,c^2)}$ den Vorfaktor für die Stromdichte $\vec{j}$ in Gl.(37b) in die gewünschte nichtrelativistische Form $e\,\hbar/2\,m$.

Die *Iso*spin*) Interpretation einer Ladungsdichte oder Ladung wie in (35) eröffnet eine bessere Einsicht in die Quantenmechanik als die des Beharrens und Suchens nach Gleichungen vom Typ der Schrödingergleichung, die nur erste Ableitung der Zeit haben sollten, auch wenn diese Strategie mit Diracs Gleichung sehr erfolgreich gewesen ist.

*) Siehe für mehr Details: Schweber, Introduction to Quantum Field Theory.