

### §3 Zweite Quantisierung der Schrödinger Gleichung

Die SCHRÖDINGERGleichung für viele Teilchen, insbesondere für die viele Elektronen eines Metalls, und die formelle Feldquantisierung der letzten Abschnitte angewendet auf die Einteilchen SCHRÖDINGERGleichung führen zu denselben Ergebnis. Dies soll hier diskutiert werden. Zunächst geht es um den formelle Zugang.

*Lagrange- & Hamiltonfunktion für die Schrödinger Gleichung*

Da die SCHRÖDINGERGleichung eine Differentialgleichung von erster Ordnung in der Zeit ist, scheint sie nicht so recht zur LAGRANGE-Mechanik zu passen. Schreibt man jedoch die SCHRÖDINGERGleichung als zwei Gleichungen für den Realteil und den Imaginärteil separat, d.h.,

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_1 + V(\vec{r}) \psi_1 \quad (1a)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_2 + V(\vec{r}) \psi_2 \quad (1b)$$

statt für  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i \psi_2)$  oder für die konjugiert komplexe Wellenfunktion  $\Psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - i \psi_2)$ , dann läßt sich leicht die dazugehörige HAMILTONfunktion erraten. Das Schema der HAMILTONschen Bewegungsgleichungen ist  $p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$  und  $q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ , so daß die Interpretation von  $q_j \hat{=} \psi_1(\vec{r})$  und von  $p_j \hat{=} \hbar \psi_2(\vec{r})$  naheliegt. Dabei entspricht dem Index  $j$  die Koordinaten  $\vec{r}$ . Die HAMILTONfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2] + V(\vec{r}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \psi_1 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi_1 + \psi_2 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi_2 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

erzeugt dann mit den Funktionalableitungen nach  $\psi_1(\vec{r})$  und nach dem konjugierten Feld  $\hbar \psi_2(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\hbar \psi_2(\vec{r})] &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi_1(\vec{r})} = +\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_1(\vec{r}) - V(\vec{r}) \psi_1(\vec{r}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi_2(\vec{r})} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_2(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi_1(\vec{r}) \end{aligned}$$

die gewünschte Bewegungsgleichung (1a) und (1b). Aus der zweiten Form von  $\mathcal{H}$ , die durch partielle Integration aus der ersten Form der Gl.(2) entsteht, läßt sich dies einfacher ablesen.

Mit HAMILTONfunktion  $\mathcal{H} = \int H d^3r$  und die LAGRANGEFunktion  $\mathcal{L} = \int L d^3r$  und der Beziehung zwischen  $L$  und  $H$

$$\hbar \psi_2 \dot{\psi}_1 - H = L ,$$

die in der Punktmechanik die Form  $\sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, p_j) = H$  hat, läßt sich die LAGRANGEFunktion finden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ 2 \hbar \psi_2 \dot{\psi}_1 - \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2] - V(\vec{r}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right\} . \quad (3)$$

Da aber nur die Wirkung  $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt$  zählt, läßt sich diese Form modifizieren. Welche Form man auch wählt  $\delta \mathcal{S} = 0$  hat als Konsequenz Gl.(1a) und Gl.(1b). Dies gilt auch für die symmetrische Form

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \hbar \psi_2 \dot{\psi}_1 - \hbar \psi_1 \dot{\psi}_2 - \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2] - V(\vec{r}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right\} . \quad (3')$$

Man erhält sie aus (3) durch  $\int_{t_0}^{t_1} \psi_2 \dot{\psi}_1 dt = [\psi_2(t_1)\psi_1(t_1) - \psi_2(t_0)\psi_1(t_0)] - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}_2 \psi_1 dt$ , indem man die *Randterme*  $[\dots]$  vernachlässigt. Das kann man rechtfertigen, denn sie geben keinen Beitrag bei der Analyse von  $\delta \mathcal{S} = 0$ , weil gerade diese Randterme nicht variiert werden, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Was man also nicht klären kann ist, welche Felder wirklich zueinander *konjugiert* sind. Mit der Form (3') und  $\mathcal{L}' = \int L' d^3r$  ist  $\partial L' / \partial \dot{\psi}_1 = \hbar \psi_2 / 2$  und  $\partial L' / \partial \dot{\psi}_2 = -\hbar \psi_1 / 2$ , d.h. beide Felder  $\psi_1$  und  $\psi_2$  kommen auch als konjugierte Felder vor, während mit  $\mathcal{L}$  und  $L$  der Gl.(3) und mit  $\partial L / \partial \dot{\psi}_1 = \hbar \psi_2$  nur das Feld  $\psi_2$  zu  $\psi_1$  *konjugiert* ist.

### Quantisierung der Schrödingergleichung

Es ist deshalb erfolgversprechender die HAMILTONfunktion (2) als Ausgangspunkt zu nehmen. Sie läßt sich mit den ursprünglichen komplexen Feldern  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2)$  und  $\Psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2)$  in einen einfachen Ausdruck verwandeln:

$$\mathcal{H} = \int d^3r \Psi^*(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \Psi(\vec{r}) \quad (2')$$

Um den Übergang zur quantisierten Form zu schaffen, macht man  $\Psi$  und  $\Psi^*$  zu Operatoren  $\Psi$  und  $\Psi^\dagger$ , die folgenden Vertauschungsrelationen genügen

$$\Psi(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') - \Psi^\dagger(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (4a)$$

wobei die Feldoperatoren mit sich selber überall vertauschen, d.h.,

$$\Psi(\vec{r}) \Psi(\vec{r}') - \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') - \Psi^\dagger(\vec{r}') \Psi^\dagger(\vec{r}) = 0 . \quad (4b)$$

Um nachzuprüfen, ob die Wahl (4a) sinnvoll ist, berechnet man die Zeitabhängigkeit der Feldoperatoren mit der HEISENBERGSchen Methode

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \Psi(\vec{r})] = \frac{1}{i\hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \Psi(\vec{r}) . \quad (5)$$

Man erhält also formal dieselbe Gleichung wie für eine Wellenfunktion  $\Psi$ .

Vergleicht man mit der Lagrangefunktion (3'), die umgeschrieben auf komplexe Felder  $\Psi$  und  $\Psi^*$  die folgende Form annimmt

$$\mathcal{L}'' = \int d^3r \left\{ i\hbar \Psi^*(\vec{r}) \dot{\Psi}(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) (\nabla \Psi) - V(\vec{r}) \Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \right\} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \dot{\Psi}} = i\hbar \Psi^* \quad (3'')$$

dann bekommt man für das *konjugierte* Feld  $\Pi = i\hbar \Psi^*$ . Der erste Term unter dem Integral stimmt eigentlich nicht mit dem in (3') überein. Es ist  $i\hbar \Psi^*(\vec{r}) \dot{\Psi}(\vec{r}) = \psi_2 \dot{\psi}_1 - \psi_1 \dot{\psi}_2 + i(\psi_1 \dot{\psi}_1 + \psi_2 \dot{\psi}_2)$ , aber der Imaginärteil davon ist  $\propto \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^2 + \psi_2^2)$  und spielt damit für die Bedingung  $\delta S = 0$  keine Rolle. Die Vertauschungsrelation (4a) kann man also eine konventionelle Vertauschungsrelation zwischen "Ort"  $\Psi$  und "Impuls"  $i\hbar \Psi^*$  interpretieren, denn es ist  $i\hbar \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}') - \Psi(\vec{r}') i\hbar \Psi^\dagger(\vec{r}) = \frac{\hbar}{i} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  in Übereinstimmung mit (4a), wobei wie dort  $\Psi^*$  durch das adjungierte  $\Psi^\dagger$  ersetzt worden ist.

Vertauschungsrelationen  $[ , ]_-$

Die Vertauschungsrelationen (4) sind die üblichen Vertauschungsrelationen für ein *bosonisches* Feld. Die formelle Vertauschungsrelation (4a) läßt sich mit Hilfe eines Orthogonalsystems von Funktionen  $\varphi_n(\vec{r})$  dann als

$$\Psi = \sum_n b_n \varphi_n(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \Psi^\dagger = \sum_n b_n^\dagger \varphi_n^*(\vec{r}) \quad (6)$$

mit

$$b_{n'} b_n^\dagger - b_{n'}^\dagger b_n = \delta_{n,n'} \quad , \quad b_{n'} b_n - b_{n'}^\dagger b_n^\dagger = 0 \quad \text{und} \quad b_{n'}^\dagger b_n^\dagger - b_{n'}^\dagger b_n^\dagger = 0 \quad (7)$$

Die Vertauschungsrelation (4a) ist damit

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') - \Psi^\dagger(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) &= \sum_n \sum_{n'} [b_n, b_{n'}^\dagger] \varphi_n(\vec{r}) \varphi_{n'}^*(\vec{r}') \\ &= \sum_n \varphi_n(\vec{r}) \varphi_n^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

wobei die  $\delta$ -Funktion eine Folge der angenommenen Vollständigkeit des Funktionensystem  $\varphi_n$  ist.

Damit  $\mathcal{H}$  der Gl.(2') eine einfache Form bekommt, wählt man die Funktionen  $\varphi_n$  als Eigenfunktionen der Einteilchen-Operators, d.h.,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \varphi_n(\vec{r}) = \epsilon_n \varphi_n(\vec{r}) \quad . \quad (8)$$

Setzt man  $\Psi$  und  $\Psi^*$  in (2') ein, so wird daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right] \Psi(\vec{r}) = \sum_n \sum_{n'} b_n^\dagger b_{n'} \int \varphi_n^*(\vec{r}) \epsilon_{n'} \varphi_{n'}(\vec{r}) d^3r \\ &= \sum_n \epsilon_n b_n^\dagger b_n \quad . \end{aligned} \quad (9)$$

Mit den letzten Schritten, die zur Gl.(9) führen, hat man das *Rezept* für die Umschreibung eines SCHRÖDINGEROPERATORS (8) auf viele Teilchen, wobei die Anzahl der Teilchen  $N$  durch

$$N = \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = \sum_n b_n^\dagger b_n \quad (10)$$

gegeben ist.

Antikommutation  $[ , ]_+$

Bei weitem die wichtigere Anwendung der Vielteilchen-SCHRÖDINGERgleichung sind die auf Viel-elektronensysteme wie Atome, Moleküle und Metalle zum Beispiel. Anstelle von (4a) fordert man

$$\Psi(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') + \Psi^\dagger(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad (11a)$$

und daß die Feldoperatoren mit sich selber überall *antivertauschen*, d.h.,

$$\Psi(\vec{r}) \Psi(\vec{r}') + \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') + \Psi^\dagger(\vec{r}') \Psi^\dagger(\vec{r}) = 0 \quad . \quad (11b)$$

Die Darstellung dieser Operatoren durch ein Funktionensystem  $\varphi_n$  ist wie weiter oben

$$\Psi = \sum_n c_n \varphi_n(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \Psi^\dagger = \sum_n c_n^\dagger \varphi_n^*(\vec{r}) \quad (12)$$

mit Vernichtungsoperatoren  $c_n$  und Erzeugungsoperatoren  $c_n^\dagger$ , die ebenfalls antikommutieren

$$c_{n'} c_n^\dagger + c_n^\dagger c_{n'} = \delta_{n,n'} , \quad c_{n'} c_n + c_n c_{n'} = 0 \quad \text{und} \quad c_{n'}^\dagger c_n^\dagger + c_n^\dagger c_{n'}^\dagger = 0 . \quad (13)$$

Falls die Funktionen  $\varphi_n$  wie in (8) Eigenfunktionen mit Eigenwert  $\epsilon_n$  von  $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$  sind, dann läßt sich  $\mathcal{H}$  wie vorher nach Gl.(9) umschreiben

$$\mathcal{H} = \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \Psi(\vec{r}) = \sum_n \epsilon_n c_n^\dagger c_n , \quad (14)$$

so daß nur die kommutierende  $b_n, b_n^\dagger$  durch die  $c_n, c_n^\dagger$  ersetzt werden. Gleiches gilt für die Teilchenzahl, die analog zu Gl.(10) auf antikommutierenden  $c_n, c_n^\dagger$  umgeschrieben folgende Form hat

$$N = \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = \sum_n c_n^\dagger c_n . \quad (15)$$

Eigentlich wurden bei den letzten Umformungen die Vertauschungsrelationen (11) und (13) nicht benutzt, die  $c_n$  und die  $c_n^\dagger$  sind formell in (12) nur Koeffizienten einer Entwicklung, einer FOURIERENTWICKLUNG z.B. mit  $\varphi_n \propto e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}$ , die dann die Zeitabhängigkeit der *Feldoperatoren*  $\Psi$  oder  $\Psi^*$  nach Gl.(14) ergeben sollten. Mit HEISENBERGS Bewegungsgleichung für Operatoren ist

$$\dot{c}_n = \frac{1}{i\hbar} [c_n, \mathcal{H}] = \frac{1}{i\hbar} [c_n, \epsilon_n c_n^\dagger c_n] = \frac{\epsilon_n}{i\hbar} (c_n \cdot c_n^\dagger c_n - c_n^\dagger c_n \cdot c_n) = \frac{\epsilon_n}{i\hbar} c_n \quad (16)$$

wobei benutzt wurde, daß der Kommutator  $c_n \cdot c_{n'}^\dagger c_{n'} - c_{n'}^\dagger c_{n'} \cdot c_n = 0$  ist für  $n \neq n'$ . Dies ist leicht zusehen, denn für  $n \neq n'$  sind alle Antikommutatoren (13) Null. Daher ist bei zweimaligen *durchtauschen* von  $c_n$  ein zweimaliger Vorzeichenwechsel zu berücksichtigen, so daß dabei eine einfache Vertauschung ohne Vorzeichen  $c_n \cdot c_{n'}^\dagger c_{n'} = -c_{n'}^\dagger \cdot c_n c_{n'} = c_{n'}^\dagger c_{n'} \cdot c_n$  resultiert. Es sollten in physikalischen *Observablen* die antikommutierenden  $c_n, c_n^\dagger$  nur paarweise auftreten, damit zum Beispiel der Kommutator mit der Energie für die Ableitung nach der Zeit seinen Sinn erhält.

Zurück zu (16), wo nur Vernichts- und Erzeugungsoperatoren mit gleichem Index  $n$  vorkommen. Für  $n = n'$  ist mit (13)  $c_n c_n = 0$  und  $c_n c_n^\dagger = 1 - c_n^\dagger c_n$ , so daß damit schließlich  $\dot{c}_n = -i\omega_n c_n$  mit  $\omega_n = \epsilon_n/\hbar$  wird. Somit ist die Zeitabhängigkeit der  $c$ -Operatoren

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-i\omega_n t} \quad \text{und} \quad c_n^\dagger(t) = c_n^\dagger(0) e^{+i\omega_n t} \quad (17)$$

dieselbe wie die der kommutierende  $b$ -Operatoren.

### *Jordan-Wigner Transformation*

Die Frage, was die *Antivertauschung* bedeutet, läßt sich am besten an Hand der Wellenfunktionen für viele Teilchen und deren Symmetrie gegenüber Permutation ihrer Koordinaten oder Quantenzahlen beantworten. Ein Verständnis für die *Algebra* der Vertauschungen in Gl.(13) ist wohl besser über den Vorschlag von JORDAN und WIGNER zu bekommen, den *Vernichter*  $c$  und den *Erzeuger*  $c^\dagger$  als *Leiteroperatoren*  $\sigma^-$  und  $\sigma^+$  für den Drehimpuls  $\frac{1}{2}$  zu interpretieren.

Reduziert auf  $n = n'$  ist (13)

$$c_n c_n^\dagger + c_n^\dagger c_n = 1 , \quad c_n c_n = 0 , \quad c_n^\dagger c_n^\dagger = 0 , \quad (18)$$

und für die PAULIMATRIZEN des  $n$ -ten Spins  $\sigma_n^+, \sigma_n^-$  gilt

$$\sigma_n^- \sigma_n^+ + \sigma_n^+ \sigma_n^- = 1 , \quad \sigma_n^- \sigma_n^- = 0 , \quad \sigma_n^+ \sigma_n^+ = 0 . \quad (19a)$$

Die Übereinstimmung zwischen den beiden Realisierungen ist offensichtlich perfekt.

Es sind die Kommutationsregeln für  $n \neq n'$  die Probleme bereiten. Für die Spinoperatoren gilt

$$\sigma_n^- \sigma_{n'}^+ - \sigma_{n'}^+ \sigma_n^- = 0, \quad \sigma_n^- \sigma_{n'}^- - \sigma_{n'}^- \sigma_n^- = 0, \quad \sigma_n^+ \sigma_{n'}^+ - \sigma_{n'}^+ \sigma_n^+ = 0 \quad (19b)$$

weil sie für verschiedene  $n \neq n'$  vertauschen. Um diesen Defekt zu *heilen*, benutzt man, daß verschiedene PAULIMatrizen antikommutieren. Da  $\sigma_n^\pm = (\sigma_n^x \pm \sigma_n^y)/2$  ist, gilt auch

$$\sigma_n^\pm \sigma_n^z + \sigma_n^z \sigma_n^\pm = 0 \quad (20)$$

Mit dem JORDAN–WIGNER–Trick

$$\begin{aligned} \sigma_1^z \sigma_2^z \dots \sigma_{n-1}^z \sigma_n^- &= \prod_{m=1}^{n-1} \sigma_m^z \cdot \sigma_n^- = c_n \\ \sigma_1^z \sigma_2^z \dots \sigma_{n-1}^z \sigma_n^+ &= \prod_{m=1}^{n-1} \sigma_m^z \cdot \sigma_n^+ = c_n^\dagger \end{aligned} \quad (21)$$

schaft man es die Vorzeichen in (19b) von  $-$  in  $+$  zu verwandeln. Für ein Paar von Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren mit gleichem Index  $n$  ändert sich gegenüber (19a) nichts, z.B. ist

$$c_n^\dagger c_n = \prod_{m=1}^{n-1} (\sigma_m^z)^2 \cdot \sigma_n^+ \sigma_n^- = \sigma_n^+ \sigma_n^- \quad (22)$$

weil  $\sigma_m^z \sigma_m^z = 1$  ist. Für ungleiche Indices, für  $n' < n$  bleibt das Produkt der  $\sigma_m^z$  für  $n' \leq m < n$  übrig. Es ist deshalb

$$\begin{aligned} c_n^\dagger c_{n'} &= \sigma_n^+ \sigma_{n'}^z \dots \sigma_{n-1}^z \sigma_{n'}^- \\ c_{n'} c_n^\dagger &= \sigma_{n'}^- \sigma_{n'}^z \dots \sigma_{n-1}^z \sigma_n^+ \end{aligned}$$

so daß die Summe

$$c_n^\dagger c_{n'} + c_{n'} c_n^\dagger = \prod_{m=n'+1}^{n-1} \sigma_m^z \cdot \sigma_n^+ (\sigma_{n'}^z \sigma_{n'}^- + \sigma_{n'}^- \sigma_{n'}^z) = 0 \quad (13')$$

mit (20) tatsächlich Null wird in Übereinstimmung mit (13) für  $n \neq n'$ .

Schreibt man die Teilchenzahl  $N$  von Gleichung (15) auf PAULIMatrizen mit Hilfe von (22) um, d.h.,  $c_n^\dagger c_n = \sigma_n^+ \sigma_n^- = (\sigma_n^z + 1)/2$ , dann erhält man einen Ausdruck, der das PAULIPrinzip unmittelbar sichtbar macht

$$N = \sum_n c_n^\dagger c_n = \sum_n \frac{1}{2} (\sigma_n^z + 1), \quad (15')$$

denn mit den Eigenwerten 1 oder 0 von  $\frac{1}{2} (\sigma_n^z + 1)$  kann ein Zustand  $n$  nur besetzt und unbesetzt sein. Eine zweifache Besetzung ist mit den *Antivertauschungsregeln* (13) nicht möglich, denn ein Spin- $\frac{1}{2}$  hat nur zwei Zustände. Dies hätte man auch ohne dem Umweg über die PAULIMatrizen direkt sehen können, denn mit  $c_n^\dagger c_n^\dagger = 0$  von (18) ist die Erzeugung von zwei Teilchen ausgeschlossen.

Daß man die Minuszeichen der Spinvertauschungsregeln von (19b) nach JORDAN und WIGNER (21) in Pluszeichen verwandeln kann, ist wichtig, denn nur so ist es möglich die Basiswellenfunktionen  $\varphi_n$  zu wechseln. Nur wenn überall Antikommutationsregeln gelten, bleiben sie bei einer unitären Transformation erhalten, die einem Wechsel des Funktionensystems entspricht.