

## Übungen zur Quantenmechanik II

8. Übungsblatt

15. Dez. 2005

1.) Zeigen Sie, daß man mit einer JORDAN–Wigner Transformation aus Spin–1/2–Operatoren FERMI–Operatoren konstruieren kann, die folgende Vertauschungsrelationen genügen:

$$\begin{aligned} c_n^\dagger c_{n'} + c_{n'} c_n^\dagger &= \delta_{n,n'} \\ c_n^\dagger c_{n'}^\dagger + c_{n'}^\dagger c_n^\dagger &= 0 \\ c_n c_{n'} + c_{n'} c_n &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Die Spin–1/2–Matrizen sind PAULIMatrizen:

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man betrachtet nun viele solcher Spinmatrizen  $\sigma_n^z$ ,  $\sigma_n^+$  und  $\sigma_n^-$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ , so daß für jedes  $n$  die Vertauschungsregeln  $\sigma_n^+ \sigma_n^- + \sigma_n^- \sigma_n^+ = 1$  gilt, ebenso wie die Identitäten  $\sigma_n^+ \sigma_n^+ = 0$  und  $\sigma_n^- \sigma_n^- = 0$ . Dies entspricht den Vertauschungsrelationen für die Vernichtungs– und Erzeugungsoperatoren  $c_n$  und  $c_n^\dagger$  bei gleichem  $n$ . Sind  $n$  und  $n'$  verschieden, dann vertauschen jedoch die Spinmatrizen. Zum Beispiel ist  $\sigma_n^+ \sigma_{n'}^- - \sigma_{n'}^- \sigma_n^+ = 0$ .

Diesen Defekt kann man mit folgendem Ansatz beheben:

$$c_n^\dagger = \prod_{m=1}^{n-1} \sigma_m^z \cdot \sigma_n^+ \quad \text{und} \quad c_n = \prod_{m=1}^{n-1} \sigma_m^z \cdot \sigma_n^- .$$

Prüfen Sie diese Behauptung nach, daß damit wirklich die Vertauschungsrelationen (\*) gelten.

2.) Zeigen Sie daß mit dem HAMILTONoperator

$$\mathcal{H} = \sum_n \epsilon_n c_n^\dagger c_n ,$$

wobei die  $c_n^\dagger$  und  $c_n$  FERMIoperatoren sind für die die Vertauschungsrelationen (\*) gelten, die folgenden Zeitabhängigkeiten mit  $\omega_n = \epsilon_n/\hbar$  sich ergeben:

$$c_n^\dagger(t) = c_n^\dagger(0) e^{i\omega_n t} \quad \text{und} \quad c_n = c_n(0) e^{-i\omega_n t} .$$

Vergleichen Sie mit dem Fall bei dem die Vernichtungs– und Erzeugungsoperatoren kommutieren.

3.) Der Übergang  $2p \rightarrow 1s$  im H–Atom ist *dipoler*laubt und es wird dabei ein Lichtquant emittiert. Hingegen ist der  $2s$ –Zustand metastabil und kann nur durch gleichzeitige Emission von zwei Lichtquanten in den  $1s$ –Grundzustand übergehen. Mit welcher Form der Wechselwirkung könnte man analog zur Dipolstrahlung und FERMI–Goldener Regel solch einen Zweiphotonenübergang analysieren? Welche Wechselwirkung ermöglicht die Emission der 21 cm–Linie des H–Atoms?