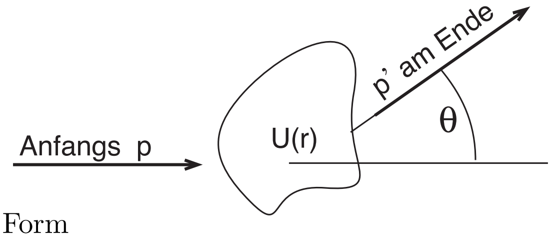
Übungen zur Quantenmechanik II

7. Übungsblatt *6. Dez. 2005*

1.) Die Bornsche Näherung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt eines nichtrelativistischen Teilchen mit Impuls $\vec{p}$, das durch ein Potential $U(\vec{r})$ elastisch gestreut wird, so daß danach sein



Impuls $\vec{p}\,'$ ist, hat folgende Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\,\pi^2\hbar^4}\left|\,U_{p-p'}\right|^2 . \qquad (*)$$

Er ist also bis auf einen Faktor gleich dem Quadrat der Fouriertransformierten des Potentials,

$$\int d^3r\,U(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\,i(\vec{p}-\vec{p}\,')\vec{r}/\hbar} = U_{p-p'}$$

von dem das Partikel mit Masse m gestreut wird.

a) Benutzen Sie Fermis *Goldene Regel*, um die Formel $(*)$ herzuleiten. Diese Regel bestimmt die Übergangsrate $1/\tau$ von einem Zustand m zu einem Zustand n

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\,\pi}{\hbar}\left|\tilde{\mathcal{H}}_{m,n}\right|^2\rho(E_n) ,$$

wobei ρ die Zustandsdichte der Endzustände n mit Energie E_n ist. Die Größe $\tilde{\mathcal{H}}_{m,n}$ bezeichnet das Matrixelement der Anfangs– und Endzustände m und n der *Störung* $\tilde{\mathcal{H}}$, die den Übergang ermöglicht†. Hier ist es U.

b) Für die Streuung an einem Coulombpotential ergibt sich aus $(*)$ die Rutherfordformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2\,Z^2}{4}\left(\frac{m\,e^2}{p^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \qquad (**)$$

mit $U = z\,Z\,e^2/r$ (Z ist die Kernladungszahl und z die Zahl der Ladungen des α–Teilchens). Prüfen Sie die Formel $(**)$ nach.

2) Invarianten des elektromagnetischen Feldes gegenüber Lorentztransformationen sind

$$\vec{E}^{\,2} - \vec{H}^{\,2} \quad \text{und} \quad \vec{E}\cdot\vec{H} .$$

Warum sind diese Größen Invariante? Welche Bedeutung hat dies?
Siehe hierzu: Landau-Lifschitz Bd.II, *Klassische Feldtheorie*, §25 *Invarianten des Feldes.*

---

† $d\sigma/d\Omega$ bestimmt die Übergangsrate $1/\tau$, wenn man mit dem "Teilchenfluß" $v/\mathcal{V}$ multipliziert, d.h. $v{=}p/m$ und $\mathcal{V}{=}L^3$ ist ein großes Volumen, so daß der Zustand p durch $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\,\mathrm{e}^{\,i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ gegeben ist. Es gilt also $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{\mathcal{V}}\,\frac{d\sigma}{d\Omega}$.