Übungen zur Quantenmechanik II

6. Übungsblatt *1. Dez. 2005*

1.) Das mit Φ bezeichnete skalare Feld ist

$$\Phi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{n}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\,\omega_n}}\, \left(\mathrm{e}^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}} \;+\; \mathrm{e}^{-i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}\, b_{\vec{n}}^{\dagger}\right)\,, \qquad (*)$$

wobei $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ der *Wellenzahl*vektor mit $n_i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ ist und $\vec{k}_n = 2\,\pi\,\vec{n}/L$. Die Zerlegung von Φ in eine Summe von FOURIERkomponenten $\phi_{\vec{n}} = \mathrm{e}^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{r}}/\sqrt{V}$ ist auf einen Würfel mit großer Kantenlänge L und Volumen $V = L^3$ eingeschränkt. Periodische Randbedingung fixieren die möglichen Vektoren $\vec{k}_n$ für die Ausbreitung der ebenen Wellen. Damit bei gleicher Wellenzahl $\vec{n} = \vec{n}'$ die Normierung stimmt, d.h. es soll

$$\int_V \phi^*_{\vec{n}}(\vec{r}\,)\,\phi^*_{\vec{n}'}(\vec{r}\,)\,d^{\,3}r \;=\; \delta_{n_1 n_1'}\,\delta_{n_2 n_2'}\,\delta_{n_3 n_3'}$$

gelten, ist ein Faktor $1/\sqrt{V}$ bei $\phi_{\vec{n}}$ notwendig. Die Frequenz $\omega_n = c\,\sqrt{\vec{k}_n^{\,2} + (m\,c/\hbar)^2}$ folgt aus der KLEIN–GORDON Gleichung.

Nach diesen Erläuterungen zurück zur Aufgabenstellung. Es soll das Feld in einem endlichen Bereich bestimmt werden, genauer

$$\hat{\Phi} \equiv \int d^{\,3}r\, P(\vec{r})\,\Phi(\vec{r}) \;,$$

wobei die positive Gewichtsfunktion nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden sein soll. Die FOURIERtransformierte von P sei

$$\chi(\vec{k}) = \int \mathrm{e}^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, P(\vec{r})\,d^{\,3}r \qquad \text{mit} \qquad \chi(0) = 1 \;,$$

so daß das Integral über die Gewichtsfunktion P eins ist, d.h. $\int d^{\,3}r\,P(\vec{r}) = 1$.

a) Zeigen Sie, daß das im Vakuumzustand die statistische Verteilung von $\hat{\Phi}$ eine GAUSSsche Form hat und daß der Erwartungswert des Feldes $\langle\hat{\Phi}\rangle$ Null ist.

b) Zeigen Sie weiter, daß für das Quadrat von $\hat{\Phi}$ der Erwartungswert

$$\langle\hat{\Phi}^2\rangle = \int d^{\,3}k\,\frac{|\chi(\vec{k})|^2}{16\,\pi^3\omega_k/\hbar} \qquad \text{mit} \qquad \omega_k = c\,\sqrt{\vec{k}^2 + k_0^2}$$

ist, wobei wie vorher $k_0 = m\,c/\hbar$ das Inverse der COMPTONwellenlänge ist.

c) Wenn die Gewichtsfunktion $P(\vec{r})$ nur in einem engen Bereich $|\vec{r}| < a$ von Null verschieden ist mit einem $a \ll 1/k_0$, d.h. in einem Bereich kleiner als die COMPTONwellenlänge, dann sollte sich $\Delta\Phi = \langle\hat{\Phi}^2\rangle^{\,1/2} \propto 1/a$ verhalten Prüfen Sie dies nach*.

---

* Siehe für weitere Hinweise: Messiah Bd.II am Ende die erste Aufgabe.