Übungen zur Quantenmechanik II

5. *Übungsblatt* — *22. Nov. 2005*

1. Das Deuteron, d.h. der Kern des schweren Wasserstoff, hat Spin $S = 1$ und ein magnetisches Moment $\mu_d = 0.5874\ e\hbar/(2m_p c)$, wobei m_p die Masse eines Protons ist. Benutzen Sie FERMIS Kontaktwechselwirkung, den einzigen Beitrag in diesem Fall,

$$\mathcal{H}_{hf} = -\frac{8\,\pi}{3}(\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_d)\,|\psi(0)|^2$$

um die *Hyperfein*kopplung zwischen dem Spin des Deuteron und dem des Elektrons im $1s$–Grundzustand zu berechnen.

Die zu erwartende Wellenlänge einer Deuteriumlinie wäre 91,7 cm. Sie wurde aber im Weltraum nicht beobachtet, weil *kosmisches* Deuterium zu selten ist.

Hinweis: Die entprechende Wasserstofflinie ist bei 21 cm, was am größeren magnetischen Moment des Protrons von $\mu_p = 2.793\ e\hbar/(2m_p c)$ liegt. Es ist aber dabei auch zu beachten, daß die Aufspaltung in einen $J = \frac{3}{2}$ Quartett und ein Dublett $J = \frac{1}{2}$ beim schweren Wasserstoff etwas anders ist als die Aufspaltung in ein Triplett und ein Singulett beim gewöhnlichen Wasserstoff. Die Aufgabe hat also zwei Teile:

a) Die Berechnung der Kopplungskonstante K_{hf}, so daß sich

$$\mathcal{H}_{hf} = K_{hf}\,(\vec{\sigma}_e \cdot \vec{S}_d)$$

in dieser einfacheren Form schreiben läßt. Es ist $\vec{\mu}_e = -g_e\,\mu_{Bohr}\,\frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_e$ und $\vec{\mu}_d = g_d\,\mu_{Kern}\,\vec{S}$, wobei g_d und das Kernmoment μ_{Kern} mit der Protonenmasse oben definiert sind. Die Elektronenmasse m_e bestimmt $\mu_{Bohr} = |e|\hbar/(2m_e c)$.

b) Die Berechnung der Eigenwerte von $(\vec{\sigma}_e \cdot \vec{S}_d)$, wobei man benutzen kann, daß dieser Matrixausdruck von $\vec{J}^{\,2}$ erzeugt wird. Das ist das Quadrat des Gesamtspins $\vec{J} = \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_e + \vec{S}_d$ mit den Eigenwerten $j(j+1)$.