

## Übungen zur Quantenmechanik II

4. Übungsblatt

15. Nov. 2005

1. Die Formel für die Feinstruktur

$$E = m c^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{\left[ n_r + \sqrt{\left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 Z^2} \right]^2} \right\}^{-1/2} \quad (*)$$

mit der radialen Quantenzahl  $n_r = 0, 1, 2, \dots$  und der Drehimpulsquantenzahl  $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  kann, weil die Feinstrukturkonstante  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  klein ist, entwickelt werden

$$E_{n,j} = m c^2 - m c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2 n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} + \frac{3}{4 n} \right) + \dots \right]$$

mit der Hauptquantenzahl  $n = n_r + j + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots$

- a) Mit der Methode der "BOHR-SOMMERFELD-Quantisierung" erhält man eine Formel, die so aussieht wie (\*). Rechnen Sie also SOMMERFELD\* nach, was viel einfacher ist, als die DIRAC-Gleichung für das Wasserstoffproblem zu lösen, um (\*) zu erhalten.
- b) Prüfen Sie die zweite Formel für  $E_{n,j}$  nach und diskutieren Sie die Größe der Aufspaltung für  $n = 2$  beim Wasserstoff mit  $Z = 1$ , d.h. die Aufspaltung der  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$  und  $P_{3/2}$  Zustände. Vergleichen Sie auch mit den experimentellen Resultaten.

---

\* Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Bd. 1