Übungen zur Quantenmechanik II

3. Übungsblatt *3. Nov. 2005*

1. Die *Heliziät* Λ, die den *Schraubensinn* angibt, d.h. rechts oder links drehend in Richtung des Impulses, ist folgendermaßen definiert:

$$\Lambda = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{p} \quad \text{mit} \quad p = |\vec{p}| \; . \tag{$*$}$$

Der Inhalt dieser Formel ist, daß der Spin auf die Richtung des Impulses $\vec{p}/p$ projeziert wird. Für die DIRACgleichung $\mathcal{H}_D = \hbar\, c\, \vec{\alpha}\, \vec{p} + \beta\, m\, c^2$ ist $\Sigma_i = I \otimes \sigma_i$, falls $\alpha_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i$ ist. Damit ist das Tensorprodukt gemeint, so daß aus den 2×2 PAULImatrizen σ_i und der 2×2 Einheitsmatrix I die 4×4 DIRACmatrizen α_i und Σ_i mit $i = 1, 2, 3$ werden. Die Helizität ist vergleichbar mit der zirkularen Polarisation des Lichts.

a) Zeigen Sie, daß der Operator Λ die Eigenwerte ± 1 hat
b) und daß Λ mit dem HAMILTONoperator der DIRACgleichung $\mathcal{H}_D$ vertauscht.

Es ist also möglich Lösungen der DIRACgleichung zu finden, die gleichzeitig auch Eigenlösungen des Helizitätsoperators Λ sind. Der Ansatz für ebene Wellen

$$\chi(\vec{r}, t) = \chi_p \exp\big(i(\vec{r}\cdot\vec{p} - E_p\, t)/\hbar \big) \quad \text{führt auf} \quad E_p\, \chi_p = (c\, \vec{\alpha}\cdot \vec{p} + \beta\, m\, c^2\,)\, \chi_p \; .$$

Die letzte Gleichung schreibt man besser als zwei Gleichungen, indem man das vierdimensionale χ_p in zwei zweidimensionale *Spinoren* $\chi_p = (\chi_{p+}, \chi_{p-})$ aufspaltet:

$$\begin{aligned} (E_p - m\, c^2)\, \chi_{p+} &= c\, (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_{p-} \\ (E_p + m\, c^2)\, \chi_{p-} &= c\, (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_{p+} \end{aligned} \tag{$+$}$$

Diese Gleichungen sind lösbar, falls $E_p^2 = (c\, \vec{p}\,)^2 + m\, c^2$ ist. Wegen der zweifachen *Spinentartung* ist χ_{p+} frei wählbar, aber χ_{p-} ist damit fixiert.

c) Zeigen Sie, daß mit der Gleichung (+) und dem Ansatz

$$\chi^+_{p+} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} p_3 + p \\ p_1 + i\, p_2 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \chi^-_{p+} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} -p_1 + i\, p_2 \\ p_3 + p \end{pmatrix}$$

sich Lösungen ebener Wellen ergeben, deren Helizität $+1$ oder -1 ist.

2. Die sogenannte *Paritätsverletzung* bei β–Zerfällen von Atomkernen, läßt sich verstehen, wenn man annimmt, daß die dabei entstehenden Neutrinos bzw. Antineutrinos keine Masse haben und mit der WEYLgleichung beschreibbar sind. Zu deren HAMILTONoperator $\mathcal{H}_W$ gehört der Helizitätsoperator Λ_W

$$\mathcal{H}_W = c\, \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \quad \text{und} \quad \Lambda_W = \vec{p}\cdot\vec{\sigma}/p \tag{$**$}$$

Dabei sind $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ nur 2×2 PAULImatrizen. Der Spin wird wie vorher bei der DIRACgleichung wie in $(*)$ auf die Impulsrichtung projiziert. Eine Besonderheit ist hier, daß HAMILTONoperator und der Operator der Helizität bis auf einen Faktor gleich sind.

a) Zeigen Sie, daß $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\, \vec{\sigma}$ mit $\mathcal{H}_W$ vertauscht, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Damit ist also $\frac{\hbar}{2}\, \vec{\sigma}$ wirklich der Spin des Partikels, das die WEYLgleichung beschreibt und der Ansatz für die Helizität $(**)$ ist gerechtfertigt.
b) Zeigen Sie das bei positiven Energien die Helizität $+1$ ist und bei negativer Energie -1. Die Helizität ist -1 für das Neutrino und $+1$ für das Antineutrino nach den Experimenten. Bei einer Spiegelung ändert die Helizität das Vorzeichen, aber der Energieeigenwerte sollten sich nicht ändern. Die WEYLgleichung ist also nicht invariant unter Spiegelungen entsprechend der Paritätsverletzung beim β–Zerfall.