Übungen zur Quantenmechanik II

2. Übungsblatt *28. Okt. 2005*

1. Leiten Sie ausgehend von der HAMILTONschen Form der DIRACgleichung

$$\mathcal{H}_D = \hbar\, c\, \vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \beta\, m\, c^2 + e\, V$$

und HEISENBERGS Bewegungsgleichung für Operatoren, die folgenden Beziehungen für die Geschwindigkeit $d\vec{r}/dt$ und für die Kraft $d\vec{\pi}/dt$ ab:

$$\frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \frac{1}{i\,\hbar} \left[\vec{r}, \mathcal{H}_D \right] = c\,\vec{\alpha}$$
$$\frac{d\,\vec{\pi}}{d\,t} = \frac{1}{i\,\hbar} \left[\vec{\pi}, \mathcal{H}_D \right] + \frac{d\,\vec{\pi}}{d\,t} = e \left(\vec{E} + \vec{\alpha} \times \vec{H} \right)$$

Da bei ist $\pi = \vec{p} - (e/c)\,\vec{A}$ und $\vec{F} = e\,(\vec{E} + \vec{\alpha} \times \vec{H})$ entspricht der LORENTZkraft.
Mit Hilfe dieser Formel sollte sich auch zeigen lassen, daß die zeitliche Änderung des Drehimpuls

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[\vec{r} \times \vec{\pi} \right] + \frac{\hbar}{2}\,\sigma \right\} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ist, also gleich dem Drehmoment ist, das die LORENTZkraft ausübt.

2.) Mit den Matrizen, die die Rotation dreidimensionaler Vektoren beschreiben, lassen sich Drehimpulsmatrizen für $l = 1$, d.h. für drei Dimensionen, konstruieren. Eine Drehung um die z–Achse um den Winkel φ_3 ist durch folgende Matrix gegeben

$$\mathcal{O}_3(\varphi_3) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend die beiden anderen Drehmatrizen $\mathcal{O}_1(\varphi_1)$ und $\mathcal{O}_2(\varphi_2)$, die Drehungen um die x–Achse und um die y–Achse definieren. Für kleine Drehwinkel φ_k mit $k = 1, 2, 3$ gilt

$$\mathcal{O}_k(\varphi_k) \approx 1 + i\,\varphi_k\, L_k\ . \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, daß für die so definierten *Erzeuger* L_k von Drehungen

$$[\, L_1, L_2\,] = i\, L_3\ , \quad [\, L_2, L_3\,] = i\, L_1 \quad [\, L_3, L_1\,] = i\, L_2$$

ist, also bis auf $\hbar$, das bei dieser geometrischen Betrachtung natürlicheweise fehlt, gleich den Vertauschungsregeln für Drehimpulse ist.
b) Diagonalisieren Sie L_3 und überführen Sie auch L_1 und L_2 in eine Form, bei der L_3 diagonal ist.

3.) Eine $(*)$ entsprechende Formel gilt auch für *Drehungen* in einem zweidimensionalen Spinraum

$$\mathcal{U}_k(\varphi_k) \approx 1 + i\,\varphi_k\, S_k\ . \qquad (**)$$

mit den drei Spinoperator $S_k = \frac{1}{2}\,\sigma_k$ und für kleine Winkel φ_k. Diese Operatoren sind durch die PAULImatrizen σ_k definiert, so daß wie in Aufg.(2) Vertauschungsrelationen $[\, S_1, S_2\,] = i\, S_3 \ldots$ usw. gelten. Finden Sie die *unitären* Matrizen $\mathcal{U}_k(\varphi_k)$ aus den *infinitesimalen Erzeugern* S_k mit

$$\mathcal{U}_k(\varphi_k) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\, \frac{\varphi_k}{n}\, S_k \right)^n = \exp(i\,\varphi_k\, S_k)$$

Für $\varphi_k = 2\,\pi$ sollten die $\mathcal{U}_k = -1$ sein. Überprüfen Sie, daß außerdem die Determinante der $\mathcal{U}_k$ gleich 1 ist. Die Drehungen im zweidimensionalen Spinraum sind Elemente der Gruppe SU2, d.h. spezielle unitäre zweidimensionale Matrizen deren Determinante 1 ist.