Übungen zur Quantenmechanik II

1. *Übungsblatt* *25. Okt. 2005*

1. Zeigen Sie daß, für die relativistische SCHRÖDINGERgleichung oder KLEIN–GORDONgleichung

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \Delta\varphi - \left(\frac{m\,c}{\hbar}\right)^2 \varphi = 0 \tag{+}$$

auch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

gültig ist, wobei die Dichte ρ im Unterschied zur gewöhnlichen SCHRÖDINGERgleichung durch

$$\rho = \frac{i\,\hbar}{2\,mc^2}\left\{\varphi^*\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi \;-\; \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi^*\right)\varphi\right\} \tag{$*$}$$

definiert ist, während der Strom $\vec{j}$ ungeändert durch

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2\,i\,\hbar\,m}\,\{\varphi^*\,\nabla\,\varphi \;-\; (\nabla\,\varphi^*)\,\varphi\}$$

gegeben ist. Zeigen Sie weiter, daß mit dem Ansatz

$$\varphi(\vec{r},\,t) = \exp\bigl(-i\,mc^2\,t/\hbar\bigr)\,\psi(\vec{r},\,t)$$

die relativistische SCHRÖDINGERgleichung zur gewöhnlichen nichtrelativistischen SCHRÖDINGERgleichung wird, wenn man alle Terme, die klein, d.h., $\propto 1/c^2$ sind, vernachlässigt. Prüfen Sie auch nach, ob man in derselben Näherung den gewohnten Ausdruck für die Dichte ρ der nichtrelativistischen SCHRÖDINGERtheorie erhalten kann. Erhält man für ρ mit Gl.($*$) eine Wahrscheinlichkeitsdichte, eine Teilchendichte oder eine Ladungsdichte?

2. Für die WEYLgleichung (dh. eine zweikomponentige DIRACgleichung mit verschwindender Masse, wobei die Wellenfunktion $\varphi = (\varphi_1,\,\varphi_2)$ ein Spinor und $\vec{\sigma} = (\sigma_1,\,\sigma_2,\,\sigma_3)$ PAULIschen Spinmatrizen sind)

$$i\,\frac{\hbar}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi \;+\; i\,\hbar\,\bigl(\vec{\sigma}\cdot\nabla\bigr)\,\varphi \;=\; 0$$

läßt sich wie bei der SCHRÖDINGERgleichung eine Dichte $\rho = \varphi^*\varphi = \varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_2^*\varphi_2$ definieren, die der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \operatorname{div}\vec{j} \;=\; 0 \tag{$**$}$$

genügt. Die Frage ist, wie findet man den Strom $\vec{j}$?
Eine Methode wäre $\partial\rho/\partial t$ zu bestimmen und die WEYLgleichung zu benutzen, um einen Ausdruck zu gewinnen, der $\operatorname{div}\vec{j}$ entspricht. Mit anderen Worten, man benutzt die Kontinuitätsgleichung, um $\vec{j}$ zu finden. Eine zweite Methode besteht darin, aus der WEYLgleichung einen HAMILTONoperator zu konstruieren. Die zeitliche Ableitung des Ortsoperators $\vec{r}$ ließe sich damit bestimmen, die der Geschwindigkeitsoperator ist. Damit wäre auch $\vec{j}$ bestimmt. Probieren Sie beide Methoden aus. Was kann man über die Eigenwerte des Geschwindigkeitsoperators sagen?

Einige Erläuterungen zu den beiden relativistischen Wellengleichungen

Equation (∗∗) was first proposed by H. Weil [Zeits. für Phys. 56, 330 (1929)] to describe a particle of mass zero and spin $\frac{1}{2}$. It was discussed in Pauli's *Handbuch* article [Handbuch der Physik, 2d ed., vol. 24/1, J. Springer, Berlin (1933)] but was rejected by him because of its noninvariance under space reflections. When experiments revealed that parity is not conserved in β decay, Lee and Yang [T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 105, 1671 (1957)], who were responsible for the original suggestion that parity might not be conserved and indicated ways of testing this hypothesis, L.D. Landau [Nuclear Physics 3, 127 (1957)] and A. Salam [Nuovo Cimento 5, 229 (1957)] proposed that neutrinos obey the Weyl equation to account for the observed nonconservation of parity . . .

Diese historischen Bemerkungen sind aus dem Buch:

S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson & C., Evanston, Illinois, 1961.

Zur Klein–Gordon Gleichung (+) in Aufg. 1 findet man in S.S. Schwebers Buch:

When Schrödinger wrote down the nonrelavistic equation now bearing his name, he also formulated the corresponding relativistic equation [E. Schrödinger, Ann. der Physik 81, 109 (1926), Sec. 6]. Subsecquently, the identical equation was proposed independently by W. Gordon [Zeits für Phys. 40, 117 & 121 (1926)], V. Fock [Zeits für Phys. 38, 242 & 39, 226 (1926)], O. Klein [Zeits für Phys. 37, 895 (1926)], J. Kudar [Ann. der Physik 81, 632 (1926)] and T. de Donder and H. van Dungen [Comptes Rendus, Julliet 1926]. The equation is derived by inserting the operator substitutions $E \rightarrow i\, \hbar \partial_t$, $\vec{p} \rightarrow -i\, \hbar\, \nabla$ relativistic relation between the energy and momentum $E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$ for a free particle with mass m . . .

. . . Because of the possibility of negative ρ values for equ.(∗∗), the Klein–Gordon equation fell into disrepute for about seven years after it was first proposed. It was only in 1934 that Pauli and Weiskopf [Helv. Phys. Acta, 7, 709 (1934)] re-established the validity of the equation by reinterpreting it as a field equation in the same sense as Maxwell's equation of the electromagnetic field and quantizing it.