Übungen zur Quantenmechanik II

0. *Übungsblatt* *18. Okt. 2005*

1. Zeige, daß für die Komponenten des Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{+}$$

mit Hilfe der Kommutationsrelationen zwischen Ort x, y, z und Impuls p_x, p_y, p_z

$$[x, p_x] = i\hbar \ , \quad [x, p_y] = 0 \ , \quad [x, p_z] = 0 \ , \quad [y, p_y] = i\hbar \ \ldots$$

die Kommutationsregeln

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \ , \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \ , \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{$*$}$$

folgen.

2. Die quantenmechanische Definition (+) des Drehimpuls ist gleich der klassischen. Da in der Quantenmechanik Operatoren an die Stelle der Impuls– und Ortskoordinaten treten, könnte die Umschreibung nicht eindeutig sein. Ist das hier der Fall?

3. In der Quantenmechanik lassen sich die Operatoren durch Matritzen darstellen. Pauli folgend kann man die einfachste Darstellung der Drehimpulsalgebra ($*$) mit Hilfe der 2×2 Matritzen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

konstruieren. Fast man diese drei Paulimatrizen als die drei Komponenten eines Vektors auf, dann ist der *Spin* $\vec{S}$ gleich

$$\vec{S} = \tfrac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}$$

Prüfen Sie nach, daß wie für den Drehimpuls $\vec{L}$ definiert durch (+) auch für $\vec{S}$ die Drehimpulsalgebra gültig ($*$) ist:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \ , \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x \ , \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \ .$$

Prüfen Sie auch nach, daß $\vec{S}^{\,2} = \frac{3}{4}\hbar^2$ ist, was $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$ bis auf $\hbar^2$ entspricht.

4. Nach Schwinger kann man die Spindarstellung benutzen, um alle Darstellungen der Drehimpulse inklusive der Spins zu finden. Man benutzt dazu den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator $k = \frac{\hbar}{2}\,(a^+a \, + \, b^+ b)$. Es ist dann

$$K_z = \tfrac{\hbar}{2}\,(a^+a \, - \, b^+ b)$$

und

$$K_+ = \hbar\, a^+ b \ , \qquad K_- = \hbar\, b^+ a \ ,$$

wobei die Auf– und Absteigeoperatoren K_+ und K_- analog wie bei den Drehimpulsen durch $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$ definiert sind. Es ist also $K_x = \frac{1}{2}\,(K_+ + K_-)$ und $K_y = \frac{1}{2i}\,(K_+ - K_-)$ und $\vec{K}^{\,2} = K_z^2 + \frac{1}{2}\,(K_+K_- + K_-K_+)$

Zeigen Sie, daß k mit allen Komponenten von $\vec{K}$ vertauscht und daß das Quadrat des Drehimpulses $\vec{K}^{\,2} = k(k+1)$ ist. Zeigen Sie weiter, daß mit $\left(a^+\right)^{k+m}\left(b^+\right)^{k-m}/[(k+m)!\,(k-m)!]^{1/2}$ normierte Zustände zum Gesamtdrehimpuls k und magnetischer Quantenzahl m definiert sind.