

Wiederholung vom 01.11.2004

Kramers-Kronig-Relationen

generelle Eigenschaft einer linearen Antwortfunktion:

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega) \cdot E(\omega) \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

$$\text{Cauchyscher Integralsatz: } \varepsilon(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

(Hauptwertintegral, *Principal part*)

Auswerten des Integrals unter den Bedingungen:

- Pole von liegen unterhalb der reellen Achse
- das Integral von $\varepsilon(\omega)/\omega$ verschwindet für einen Integrationsweg entlang eines unendlich großen Halbkreises in der unteren Hälfte der komplexen Ebene
- $\varepsilon'(\omega)$ ist gerade für reelles ω
- $\varepsilon''(\omega)$ ist ungerade für reelles ω

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert:

$$\varepsilon'(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Wichtige praktische Bedeutung: Es genügt, Real oder Imaginärteil von $\varepsilon(\omega)$ zu messen, dann ist $\varepsilon(\omega)$ vollständig festgelegt.

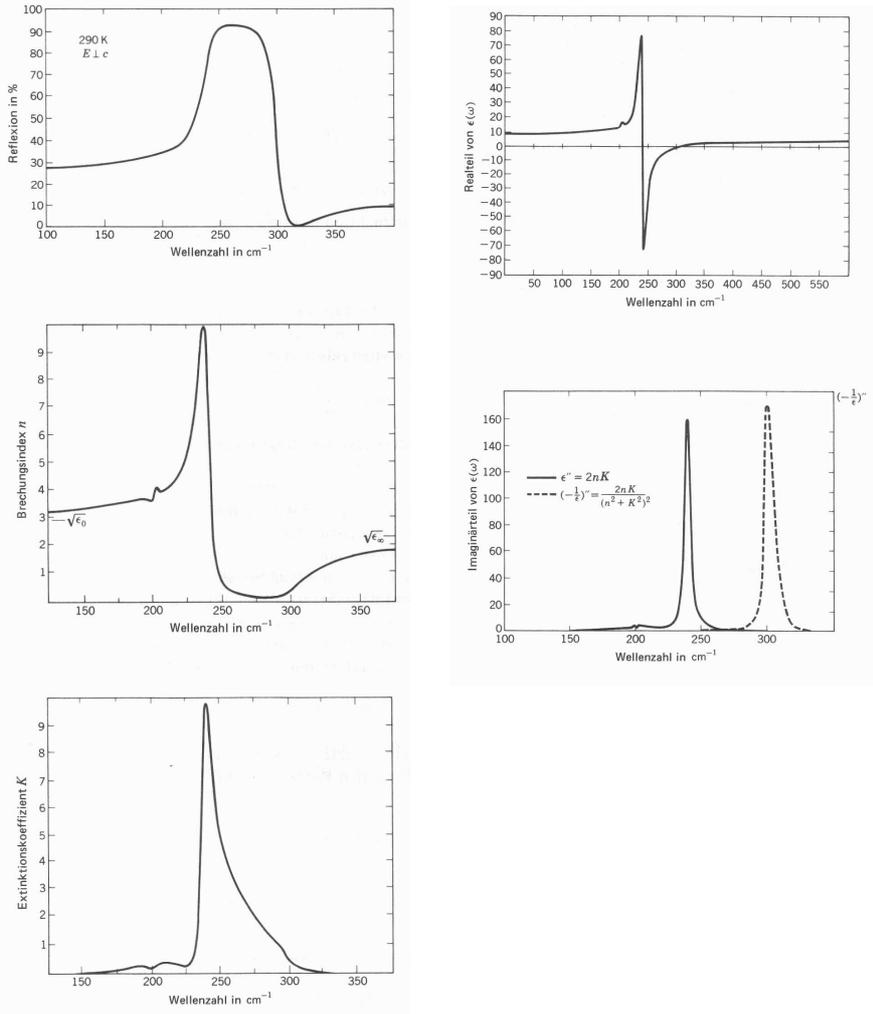
Im optischen Bereich Reflektionsmessungen:

$$\vec{E}_r(\omega) = r(\omega) \vec{E}_e e^{i\varphi(\omega)} \quad R(\omega) = |r(\omega)|^2$$

Bestimmung der Phase über Kramers-Kronig-Relation:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Beispiel: vollständige Bestimmung der optischen Parameter von CdS aus Reflektivitätsmessungen



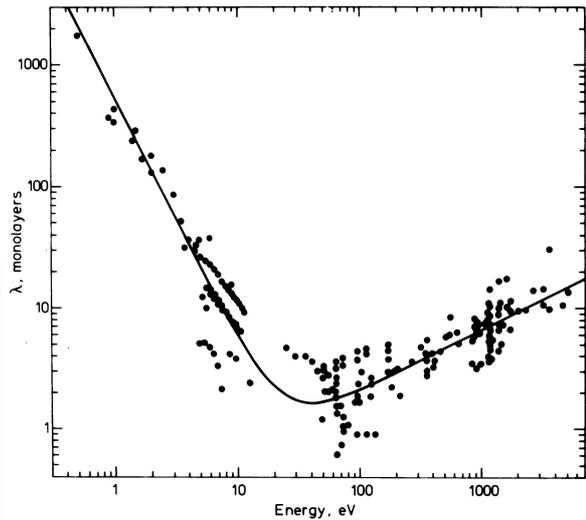
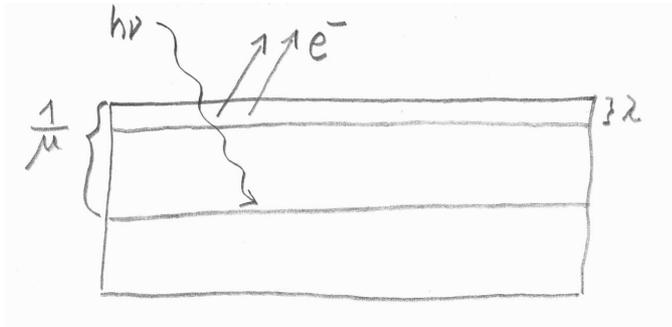
Röntgenbereich: Bestimmung des Brechungsindex aus Absorptionsmessungen

(i) Messung der Absorption durch ein dünne Schicht (Dicke d):

$$I = I_0 e^{-\mu d} \quad \mu = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) / d$$

(ii) Messung der totalen Elektronenausbeute (total electron yield, TEY):

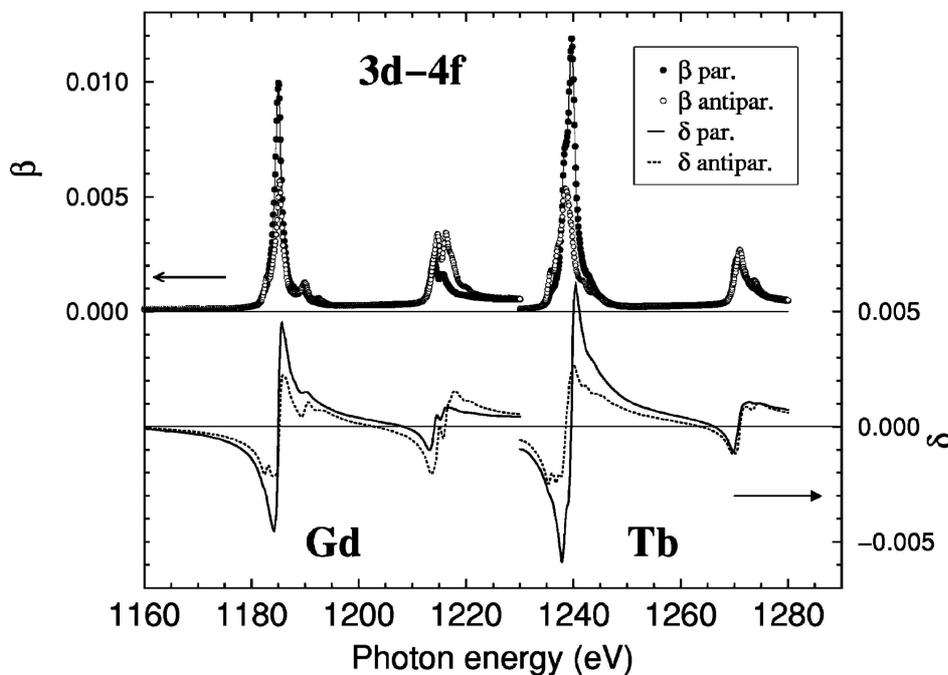
mittlere inelastische freie Weglänge λ von Elektronen in Metallen klein gegen Eindringtiefe der Photonen



$$\mu\lambda \ll 1 \Rightarrow N \propto \Delta I = I(0) - I(\lambda) = I_0(1 - e^{-\mu\lambda}) \approx I_0\mu\lambda$$

$$\Rightarrow N \propto \mu$$

Beispiel: Optische Parameter von Gd und Tb im Bereich der 3d-4f-Resonanz



Brechungsindex bei Metallen

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dämpfungsterm durch die im Material induzierten Ströme,
Lösung analog wie bei gedämpfter Schwingung:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\mu}{2} z} e^{i(kz - \omega t)}$$

Beitrag der Leitungselektronen zum Brechungsindex: frei bewegliche Ladungen (ohne Rückstellkraft wie bei gebundenen Elektronen):

$$\omega_0 = 0$$

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega^2 - i\gamma\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega}$$

Drude-Modell der Leitfähigkeit:

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau = \frac{Ne^2}{\gamma m}$$