Wiederholung vom 09.12.2004

Um die Beugung an einem Spalt zu beschreiben, kann man das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral verwenden, das man aus der Helmholtzgleichung erhält. Für das elektrische Feld E_p an einem Punkt P gilt dann:

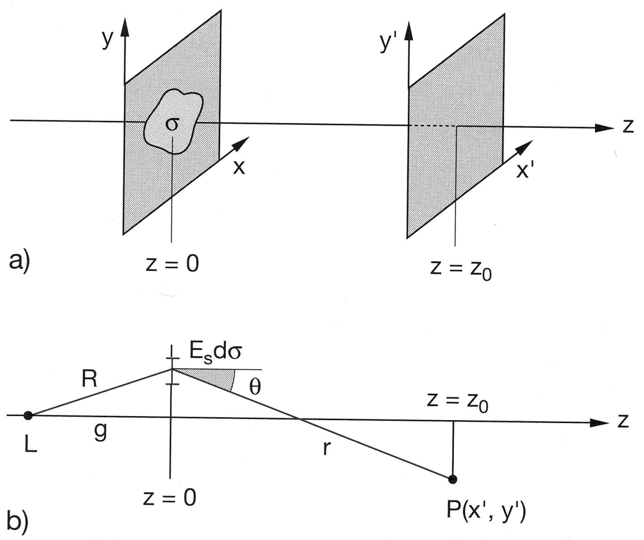

Abbildung 1: Zur Herleitung der Fresnel-Krichhoffschen Integralformel

$$E_p = \int_\sigma C E_s \frac{e^{ikr}}{r} dx dy, \tag{1}$$

wobei über den gesamten Spalt σ integriert wird. Hierbei geht man davon aus, dass von jedem Punkt des Spalts eine Kugelwelle ausgeht.

Für das Fernfeld ($z_0 \gg b^2/\lambda$) erhält man die wichtige Fraunhofernäherung. Hierbei nähert man r durch

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + d^2} \quad (2) \\ &\cong d\left(1 + \frac{(x-x')^2}{2d^2} + \frac{(y-y')^2}{2d^2}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

$$= \ d\left(1+\frac{x'x}{2d^2}+\frac{y'y}{2d^2}+\frac{x'^2+y'^2}{2d^2}+\frac{x^2+y^2}{2d^2}\right) \tag{4}$$

wobei $\frac{x^2+y^2}{2d^2}$ wegen $x, y \ll d$ vernachlässigt und $\frac{x'^2+y'^2}{2d^2}$ als unabhängige Konstante vor das Integral gezogen werden kann. Damit erhält man

$$E_p = K \int_\sigma e^{-ik\frac{x'x+y'y}{d}} dxdy, \tag{5}$$

d.h. im Fernfeld ist die Feldverteilung durch die Fouriertransformierte der Spaltfunktion gegeben, wobei für die Fouriertransformierte

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx}dx \tag{7}$$

mit $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'}{d}$ bzw. $k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{y'}{d}$ gilt. Die Intensitätsverteilung auf dem Leuchtschirm ist dann durch das Betragsquadrat der Fouriertransformation des Spalts gegeben.

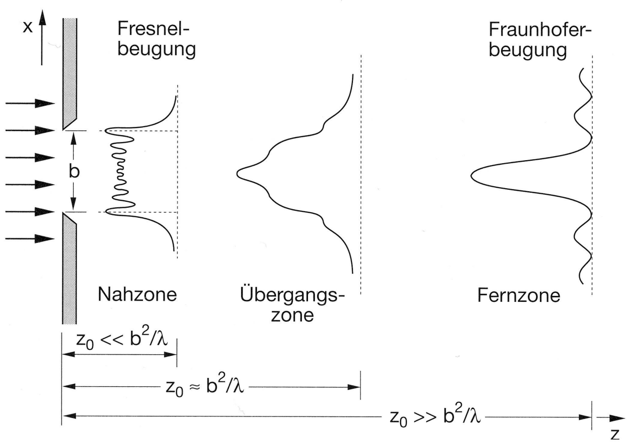

Abbildung 2: Beugungsbild im Nahfeld und Fernfeld (Fraunhoferbeugung)

Faltung und Faltungssatz

Eine Faltung im Ortsraum ist definiert durch

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')dx' \tag{8}$$

Der Faltungssatz besagt dann, dass die Fouriertransformierte H(k) gegeben ist durch das Produkt der Fouriertransformierten von F(k) und G(k)

$$H(k) = F(k) \cdot G(k) \tag{9}$$