Wiederholung vom 22.11.2004

Geometrische Optik
Begründung der geometrischen Optik: Eikonalgleichung

Lösung der Maxwellgleichungen durch folgenden Ansatz:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikS(\vec{r})} e^{-i\omega t} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0(\vec{r}) e^{ikS(\vec{r})} e^{-i\omega t}$$

$S(\vec{r})$ heißt das Eikonal. Einsetzen in die Maxwellgleichungen liefert Bedingung für $S(\vec{r})$, beispielsweise:

$$\nabla S(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) - c\vec{B}_0(\vec{r}) = -\frac{1}{ik} \nabla \times \vec{E}_0(\vec{r})$$

<u>Näherung</u> für kleine Wellenlängen, d.h. $k \to \infty$:

$$\nabla S(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) - c\vec{B}_0(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla S(\vec{r}) \times \vec{B}_0(\vec{r}) + \frac{n^2}{c} \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \nabla S(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{B}_0(\vec{r}) \cdot \nabla S(\vec{r}) = 0$$

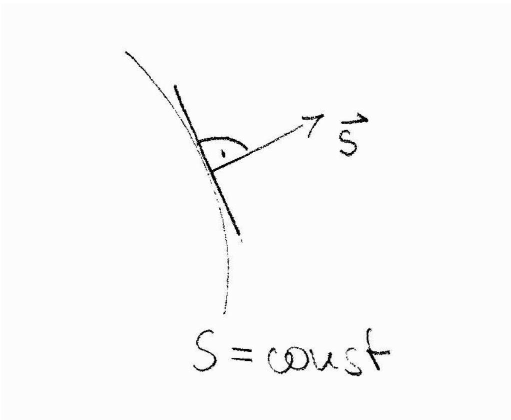
aus diesen Gleichungen erhält man die Eikonalgleichung:

$$\left(\frac{\partial S(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(x,y,z)}{\partial z}\right)^2 = n^2(x,y,z)$$

Man kann zeigen, dass der Poynting-Vektor im zeitlichen Mittel senkrecht auf Flächen mit konstantem S steht:

$$\left\langle \vec{S}_{Poynting} \right\rangle \propto \nabla S$$

Flächen mit konstantem S sind die „Wellenfronten" der geometrischen Optik, Lichtstrahl ist die Trajektorie des Energieflusses



Aus der Eikonalgleichung folgt

$$\left(\frac{\nabla S(\vec{r})}{n(\vec{r})}\right)^2 = 1 \text{ d.h. } \vec{s} = \frac{\nabla S(\vec{r})}{n(\vec{r})}$$ ist ein Einheisvektor in der momentanen Richtung der Lichtausbreitung

$$n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla S(\vec{r}) \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n(\vec{r})$$

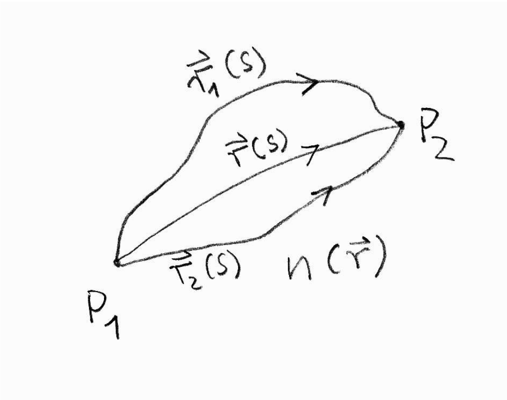
für ein homogenes Medium $(n(\vec{r}) = const, \nabla n(\vec{r}) = 0)$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \quad \Rightarrow \vec{r} = s\vec{a} + \vec{b}$$

Lichtausbreitung entlang einer Geraden: Lichtstrahlen

Der Weg des Lichts lässt sich aus einem Variationsprinzip bestimmen (Fermatsches Prinzip): optische Weglänge wird stationär

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r})ds = 0$$

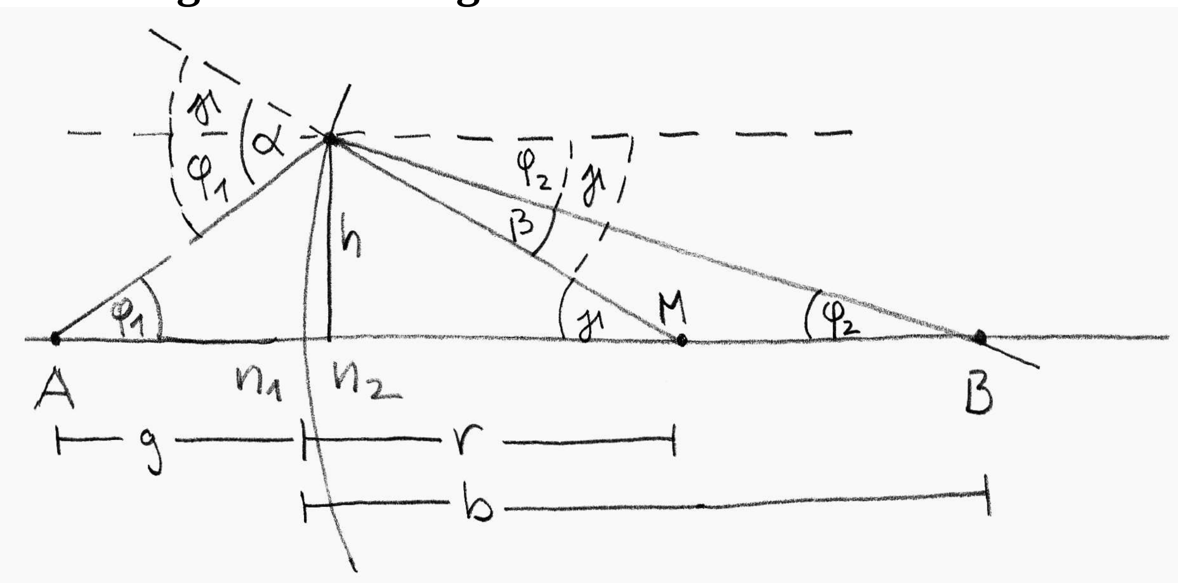


für den realen Weg $\vec{r}(s)$

liefert beispielsweise
    Brechungsgesetz,
    Reflektionsgesetz

Geometrische Optik: Lichtstrahlen anstatt von Wellen (einfacher handzuhaben)

Brechung an einer Kugelfläche



Betrachtung achsennaher Strahlen (paraxiale Näherung):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \qquad \varphi_1 \approx \sin\varphi_1 \approx \frac{h}{g} \qquad \varphi_2 \approx \sin\varphi_1 \approx \frac{h}{b}$$

$$\gamma \approx \sin\gamma = \frac{h}{r} \qquad \alpha - \varphi_1 = \gamma = \beta + \varphi_2$$

Eliminiere *h* und α: $\Rightarrow \dfrac{n_2 - n_1}{r} = \dfrac{n_1}{g} + \dfrac{n_2}{b} \qquad *$

Zwei Grenzfälle zur Bestimmung der Brennpunkte:

1) $\quad g \to \infty \Rightarrow \dfrac{n_2 - n_1}{r} = \dfrac{n_2}{f} \Rightarrow f = \dfrac{n_2}{n_2 - n_1} r$

2) $\quad b \to \infty \Rightarrow \dfrac{n_2 - n_1}{r} = \dfrac{n_1}{F} \Rightarrow F = \dfrac{n_1}{n_2 - n_1} r$

Einsetzen in * liefert die Abbildungsgleichung $\dfrac{F}{g} + \dfrac{f}{b} = 1$