Übungen zur „Experimentalphysik IV: Moderne Optik“ Wintersemester 2004/2005
Weschke/Püttner

3. Übungsblatt

Ausgabe: Donnerstag, 04.11.2004 Übung: Montag, 16:15-17:45 SR E1 (1.1.26)
Abgabe: Donnerstag, 11.11.2004 in der Vorlesung

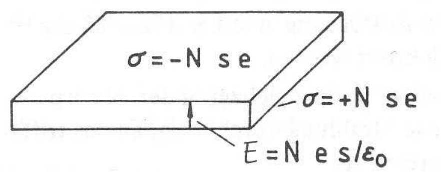
8. Plasmaschwingungen eines freien Elektronengases

Die Dielektrizitätsfunktion eines Metalls hat für hohe Frequenzen die Form:

$\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ mit der Plasmafrequenz $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$.

Im quantenmechanischen Bild ist mit dieser Frequenz eine quantisierte Energie $E = \hbar\omega_p$ verbunden, die einem Quasiteilchen, dem so genannten Plasmon entspricht.

a) Nehmen Sie an, dass die Leitungselektronen des Metalls frei beweglich gegen den Hintergrund der positiv geladenen Ionenrümpfe sind (jellium-Modell). Eine Verschiebung (Auslenkung) der Ladungsdichte führt zu einem elektrischen Feld, das eine rücktreibende Kraft auf ein Elektron ausübt (siehe Abbildung). Dies führt zu einer Schwingung, der sogenannten longitudinalen Plasmaschwingung. Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenz dieser Schwingung ω_p ist.



b) Zeigen Sie, dass die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ an der Oberfläche eines Metalls stetig ist.

c) Betrachten Sie den Fall eines Metalls im Bereich $z > 0$ mit einer Oberfläche bei $z = 0$. Eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ im (ladungsfreien Metall) lautet $\varphi_i(x,z) = Ae^{-kz}\cos kx$ (der Index *i* bezeichnet das Innere des Metalls). Berechnen Sie x- und z-Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E}$. Im Vakuum ($z < 0$) ist $\varphi_a(x,z) = Ae^{kz}\cos kx$ (der Index *a* bezeichnet das Äußere des Metalls). Zeigen Sie, dass damit die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ an der Oberfläche des Metalls stetig ist. Benutzen Sie, dass die Normalkomponente von $\vec{D}$ mit $\vec{D}_i(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}_i(\omega)$ und $\vec{D}_a(\omega) = \vec{E}_a(\omega)$ stetig ist, um zu zeigen, dass an der Oberfläche $\varepsilon(\omega) = -1$ ist. Mit der obigen Form von $\varepsilon(\omega)$ ergibt sich dann $\omega_s = \omega_p/\sqrt{2}$ für die Plasmonenfrequenz ω_s an der Oberfläche.

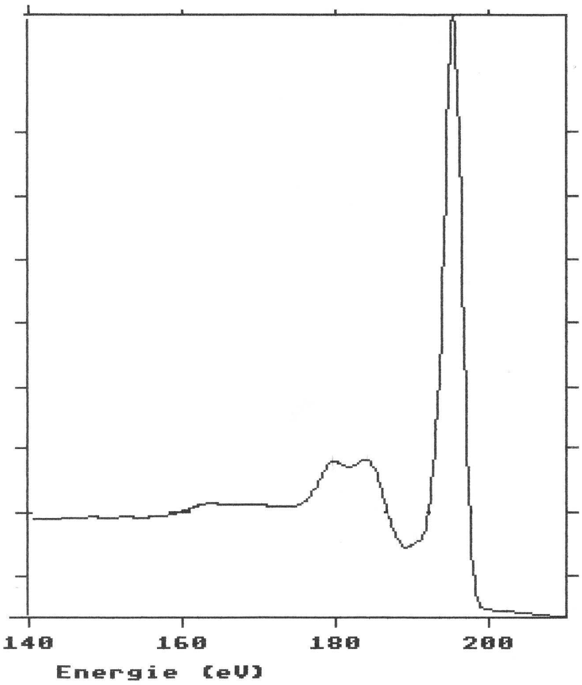
(6 Punkte)

9. Plasmonenenergien im Experiment

a) Berechnen Sie die Plasmonenenergie von Aluminium an der Oberfläche und im Volumen. Als Materialparameter geht dabei die Elektronendichte *N* ein. Welchen Lichtwellenlängen würden diese Energien entsprechen?

bitte wenden

b) Nebenstehende Abbildung zeigt ein so genanntes Elektronenenergie-verlustspektrum (electron energy loss spectroscopy, EELS) von Aluminium, wie Sie es (eventuell) im Fortgeschrittenenpraktikum messen werden. Entnehmen Sie der Abbildung die Plasmonenfrequenz der Oberfläche und des Volumens als Energiedifferenz der jeweiligen Verluststruktur zum dominanten elastischen Peak und vergleichen Sie die experimentellen Werte mit den theoretisch erwarteten. Was könnte Ursache einer möglichen Abweichung sein?



(3 Punkte)

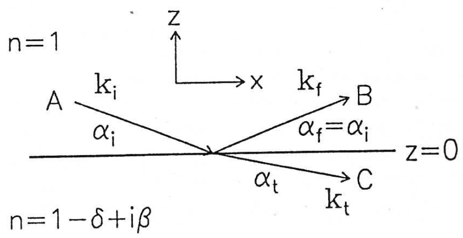
10. Brechungsindex im Röntgenbereich

Im Fall von Röntgenstrahlung liegen die Frequenzen im allgemeinen oberhalb des Bereichs, in dem Resonanzen der Materialien (Oszillatormodell) liegen.

a) Skizzieren Sie den Realteil des Brechungsindex n' in der Nähe einer Resonanz und überlegen Sie, dass der Brechungsindex oberhalb der Resonanz in der Form $n = 1 - \delta + i\beta$ mit $\delta > 0$ geschrieben werden kann. Anders als im sichtbaren Bereich tritt daher im Röntgenbereich externe Totalreflektion auf, wenn elektromagnetische Wellen vom Vakuum auf ein Medium treffen.

b) Den klassischen Elektronenradius r_0 erhält man, wenn man die Coulomb-Energie einer Elektronenladung mit der Energie gleichsetzt, die mit der Masse des Elektrons verbunden ist. Berechnen Sie r_0 (Formel und Zahlenwert).

c) Mit dem klassischen Elektronenradius und der Wellenlänge λ der einfallenden elektromagnetischen Strahlung kann man den Brechungsindex als $n = 1 - \frac{\lambda^2}{2\pi} r_0 N + i \frac{\lambda}{4\pi} \mu$ schreiben. Zeigen Sie, dass der Winkel der externen Totalreflektion durch $\alpha_c \approx \sqrt{2\delta} = \lambda \sqrt{r_0 N / \pi}$ gegeben ist. Man beachte, dass die Winkel im Röntgenbereich typischer Weise nicht bezüglich des Einfallslots definiert sind.



d) Berechnen Sie α_c für Silizium im Fall von Cu-K_α-Strahlung.

(6 Punkte)