Theoretische Mechanik

Dr. Axel Pelster

Arbeitsgruppe Professor Dr. Hagen Kleinert
Institut für Theoretische Physik
Freie Universität Berlin

Vorlesung in den Wintersemestern 2000/2001 und 2001/2002

26. April 2002

Vorwort

Das Skript der Vorlesung **Theoretische Mechanik** stellt kein Originalwerk dar, da es auf den Vorlesungsmitschriften von

- Prof. Dr. Ingo Peschl, Freie Universität Berlin
- Prof. Dr. Hannes Risken, Universität Ulm
- Prof. Dr. Gerhard Soff, Technische Universität Dresden
- Prof. Dr. Wolfgang Weidlich, Universität Stuttgart
- Prof. Dr. Julius Wess, Ludwig-Maximilians-Universität München
- Apl. Prof. Dr. Arne Wunderlin, Universität Stuttgart

und mehreren Monographien beruht. Zur inhaltlichen Vertiefung des Stoffes werden folgende Bücher empfohlen:

- V.I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser Verlag
- T. Fließbach, *Mechanik*, Spektrum der Wissenschaft
- H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Aula-Verlag
- W. Greiner, *Mechanik I und Mechanik II*, Verlag Harri Deutsch
- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner Verlag
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, VCH
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Mechanik*, Akademie-Verlag
- P. Mittelstaedt, *Klassische Mechanik*, Spektrum der Wissenschaft
- W. Nolting, *Klassische Mechanik*, Vieweg Verlag
- F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag
- A. Sommerfeld, *Mechanik*, Verlag Harri Deutsch
- M. Wagner, *Elemente der Theoretische Physik 1*, Vieweg Verlag

Die vorliegende Form des Skriptes ist auf studentische Eigeninitiative entstanden. Die Studenten Christian Blohm, Timo Damm, Henning Glawe, Michael Karcher, Tobias Munk und Christian Spudat erklärten sich dankenswerterweise im Wintersemester 2000/2001 bereit, das umfangreiche handschriftliche Manuskript in LaTeX zu übersetzen und die zahlreichen Skizzen mit Hilfe der Grafikanwendungen XFig und GnuPlot zu erstellen. Zu danken ist aber auch den vielen ungenannten Studenten, die uns auf Druckfehler hinwiesen. Schließlich gilt der Dank den Tutoren Dr. Sven Gnutzmann, Dr. Boris Kastening, Dr. Dirk Manske, und Dr. Hans-Jürgen Schmidt, die durch

Betreuung der Übungen wesentlich zum Erfolg der Vorlesung betrugen. Die im Skript erwähnten Übungsaufgaben beziehen sich auf das Wintersemester 2001/2002 und sind auf der Homepage

`http://www.physik.fu-berlin.de/~ka/teaching/klassmech01/klassmech01.htm`

zugänglich.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **iii**

Teil I: Newtonsche Mechanik

1 Vektoralgebra **3**
1.1 Rechenregeln mit Vektoren . . . 3
1.2 Komponentendarstellung von Vektoren . . . 4
1.3 Skalarprodukt zweier Vektoren . . . 5
1.4 Vektorprodukt zweier Vektoren . . . 6
1.5 Spatprodukt dreier Vektoren . . . 9
1.6 Zweifaches Vektorprodukt . . . 10
1.7 Koordinatentransformation . . . 10

2 Kinematik **13**
2.1 Bahnkurve . . . 13
2.2 Tangenteneinheitsvektor . . . 14
2.3 Normaleneinheitsvektor . . . 15
2.4 Begleitendes Dreibein . . . 16
2.5 Binormaleneinheitsvektor . . . 17
2.6 Frenetsche Formeln . . . 17

3 Dynamik **19**
3.1 Erstes Axiom: Trägheitsgesetz . . . 19
3.2 Zweites Axiom: Grundgleichung der Dynamik . . . 19
3.3 Drittes Axiom: Wechselwirkungsgesetz . . . 20
3.4 Viertes Axiom: Superpositionsprinzip der Kräfte . . . 20
3.5 Arbeit und kinetische Energie . . . 21
3.6 Konservatives Kraftfeld . . . 22
3.7 Energieerhaltungssatz . . . 25
3.8 Impuls- und Drehimpulserhaltung . . . 26
3.9 Zentralkräfte . . . 26

4 Harmonischer Oszillator **29**
4.1 Harmonische Schwingung . . . 29
4.2 Gedämpfte harmonische Schwingung . . . 32
4.2.1 Schwache Dämpfung . . . 32
4.2.2 Aperiodischer Grenzfall . . . 33
4.2.3 Starke Dämpfung . . . 34
4.3 Beliebige zeitabhängige Kraft . . . 35
4.4 Erzwungene Schwingungen . . . 38
4.5 Diracsche Deltafunktion . . . 41

4.6 Greensche Funktion 44

5 Mathematisches Pendel **47**
5.1 Bewegungsgleichung 47
5.2 Periodendauer 49

6 Parametrische Resonanz **53**
6.1 Mathieu-Gleichung 53
6.2 Floquet-Theorie 54
6.3 Stabilitätsdiagramm 59

7 Zweikörper-Problem **63**
7.1 Problemstellung 63
7.2 Reduktion zum Einkörper-Problem 64
7.3 Reduktion zur Radialgleichung 65
7.4 Energieerhaltung 66
7.5 Diskussion der Bewegung 67

8 Das Kepler-Problem **71**
8.1 Bahnkurve 71
8.2 Ellipse 73
8.3 Kepler-Gesetze 74
8.4 Hyperbel 76
8.5 Coulomb-Potential 78

9 Rutherford-Streuung **79**
9.1 Definition des Wirkungsquerschnittes 79
9.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts 81
9.3 Rutherfordscher Wirkungsquerschnitt 82
9.4 Transformation ins Laborsystem 86

10 System von Massenpunkten **89**
10.1 Newtonsche Grundgleichung 89
10.2 Schwerpunkt 90
10.3 Gesamtdrehimpuls 91
10.4 Schwerpunktsystem 92
10.5 Gesamtenergie 94

11 Harmonische Schwingungen von Massenpunkten **97**
11.1 Notation 97
11.2 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage 98
11.3 Koordinatentransformationen 99
11.4 Eigenvektoren und Eigenfrequenzen 100
11.5 Einarbeiten der Anfangsbedingungen 101
11.6 Dreiatomiges Molekül 102

12 Lineare Kette und eingespannte Saite **105**
12.1 Problemstellung 105
12.2 Basisfunktionen 106
12.3 Eigenfrequenzen 107
12.4 Ebene Wellen 108
12.5 Übergang ins Kontinuum 109
12.6 Eingespannte Saite 110

13 Rotierendes Bezugssystem **113**
13.1 Transformation der Einheitsvektoren . . . 113
13.2 Zeitableitung der Einheitsvektoren . . . 114
13.3 Zeitableitung der Vektorkomponenten . . . 115
13.4 Trägheitskräfte . . . 116
13.5 Freier Fall auf der Erde . . . 117

14 Kinematik des starren Körpers **121**
14.1 Kinetische Energie des starren Körpers . . . 121
14.2 Steinerscher Satz . . . 123
14.3 Trägheitstensor der Erde . . . 124
14.4 Drehimpuls des starren Körpers . . . 126
14.5 Hauptachsentransformation . . . 126

15 Dynamik des starren Körpers **129**
15.1 Euler-Gleichungen . . . 129
15.2 Rotation um freie Achsen . . . 130
15.3 Kräftefreier symmetrischer Kreisel . . . 131
15.4 Euler-Winkel . . . 134
15.5 Schwerer symmetrischer Kreisel . . . 136

Teil II: Höhere Mechanik

16 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte **143**
16.1 D'Alembert-Prinzip ohne Zwangsbedingungen . . . 143
16.2 D'Alembert-Prinzip mit Zwangsbedingungen . . . 144
16.3 Klassifikation von Zwangsbedingungen . . . 145
16.4 Lagrange-Gleichungen erster Art . . . 145
16.5 Energiesatz . . . 146
16.6 Lösungsverfahren . . . 147
16.7 Schiefe Ebene . . . 148

17 Lagrangesche Mechanik **151**
17.1 Generalisierte Koordinaten . . . 151
17.2 Elimination der Zwangskräfte . . . 152
17.3 Lagrange-Funktion . . . 154
17.4 Eichtransformation . . . 155
17.5 Punkttransformation . . . 156
17.6 Geodäte . . . 158
17.7 Schwerer symmetrischer Kreisel . . . 160

18 Variationsrechnung **163**
18.1 Problemstellung . . . 163
18.2 Euler-Gleichung . . . 164
18.3 Funktionalableitung . . . 166
18.4 Brachistochronen-Problem . . . 168
18.5 Verallgemeinerungen der Variationsrechnung . . . 170
18.5.1 Mehrere Funktionen . . . 170
18.5.2 Mehrere Argumente . . . 170
18.5.3 Höhere Ableitungen . . . 171
18.6 Hamilton-Prinzip . . . 172
18.7 Anmerkungen zum Hamilton-Prinzip . . . 172

19 Noether-Theorem **175**
19.1 Einparametrige Schar von Transformationen . . . 175
19.2 Invarianzbedingung . . . 175
19.3 Erhaltungsgröße . . . 176
19.4 Impulserhaltung . . . 177
19.5 Energieerhaltung . . . 177

20 Hamiltonsche Mechanik **179**
20.1 Legendre-Transformation . . . 179
20.2 Hamilton-Funktion . . . 181
20.3 Hamilton-Gleichungen . . . 181
20.4 Hamilton-Prinzip . . . 182
20.5 Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld . . . 183
20.6 Poisson-Klammern . . . 183
20.7 Liouvillscher Satz . . . 185

21 Kanonische Transformationen **191**
21.1 Transformation von Koordinaten und Impulsen . . . 191
21.2 Erste Erzeugende . . . 192
21.3 Harmonischer Oszillator . . . 193
21.4 Zweite Erzeugende . . . 194
21.5 Dritte und vierte Erzeugende . . . 195
21.6 Bedingungen für kanonische Transformationen . . . 196

22 Hamilton-Jacobi-Theorie **201**
22.1 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . 201
22.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . 202
22.3 Harmonischer Oszillator . . . 204
22.4 Separation der Variablen . . . 205
22.5 Ebene Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld . . . 207
22.6 Wirkungs- und Winkelvariablen . . . 208
22.7 Kepler-Problem . . . 211

Index **219**

Teil I

Newtonsche Mechanik

Die Mechanik ist dasjenige Teilgebiet der Physik, das die Gesetzmäßigkeiten der Bewegung materieller Körper untersucht. Dabei erfolgt diese Bewegung unter dem Einfluß von Kräften, die in der Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Der erste Teil der Vorlesung befaßt sich mit der Mechanik von einem und mehreren Massepunkten. Nach einer Einführung in die Vektoralgebra beschäftigen wir uns in der Kinematik mit der Bahnkurve eines Massenpunktes und dem begleitenden Dreibein. In der Dynamik werden die Newtonschen Axiome formuliert und erste Konsequenzen in Form des Energie-, des Impuls- und des Drehimpulserhaltungssatzes diskutiert. Anschließend untersuchen wir ausführlich einige wichtige mechanische Systeme:

- Beim gedämpften harmonischen Oszillator berechnen wir die Auslenkung für eine beliebige zeitabhängige äußere Kraft und führen damit in die Methode der Greenschen Funktion ein.
- Anhand des mathematischen Pendels mit bewegtem Aufhängepunkt erläutern wir das Phänomen der parametrischen Resonanz und der dynamischen Stabilisierung.
- Bei der Diskussion des Zweikörper-Problems leiten wir die Kepler-Gesetze der Planetenbewegung und den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Rutherford-Streuung aus den Newtonschen Axiomen her.
- Als Beispiel für ein mechanisches System mit mehreren Massenpunkten untersuchen wir sowohl die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen eines Moleküls als auch einer linearen Kette und einer eingespannten Saite bei kleinen Auslenkungen.
- Anhand des freien und des schweren Kreisels behandeln wir die Kinematik und Dynamik eines starren Körpers.

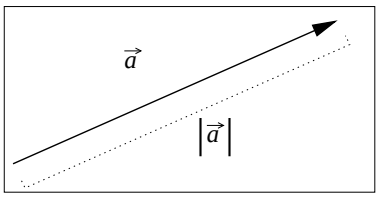
Kapitel 1

Vektoralgebra

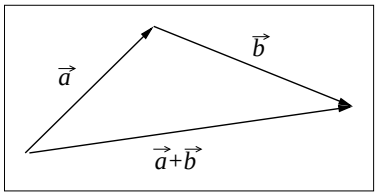
Ausgehend von der heuristischen Definition des Vektors als Pfeil mit Betrag und Richtung diskutieren wir die Rechenregeln mit Vektoren und deren Komponentendarstellung. Dann führen wir das Skalarprodukt und das Vektorprodukt zweier Vektoren ein, wobei wir insbesondere auf die Bedeutung des Kronecker-Symbols und des Levi-Cività-Tensors eingehen. Außerdem behandeln wir das Spatprodukt dreier Vektoren und den Entwicklungssatz des zweifachen Vektorproduktes. Bei der Untersuchung einer Koordinatentransformation stellen wir schließlich fest, daß ein Vektor durch sein Transformationsverhalten beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem charakterisierbar ist.

1.1 Rechenregeln mit Vektoren

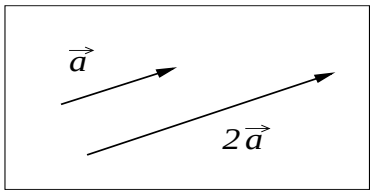
Ein Skalar, wie z.B. die Masse, die Zeit oder die Temperatur, wird durch eine einzelne Zahl charakterisiert. Demgegenüber handelt es sich bei einem Vektor $\vec{a}$ um eine gerichtete Größe, die durch einen Pfeil mit dem Betrag $|\vec{a}|$ und ihrer Richtung $\vec{a}/|\vec{a}|$ definiert wird:



Physikalische Beispiele für einen Vektor sind der Ortsvektor, der Geschwindigkeitsvektor und der Beschleunigungsvektor. Die beiden grundlegenden Rechenoperationen der Vektoren sind die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit einer Zahl. Die Addition von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird im folgenden anschaulich durch Aneinanderreihung der einzelnen Vektoren illustriert:



Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl λ führt zum Vektor $\lambda\vec{a}$, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt und den Betrag $\lambda|\vec{a}|$ besitzt:



Für diese beiden Rechenregeln mit Vektoren gelten die folgenden Axiome:

1. Kommutativität:
$$\vec{a}+\vec{b} \;=\; \vec{b}+\vec{a} \quad , \qquad\qquad \lambda\vec{a} \;=\; \vec{a}\lambda$$

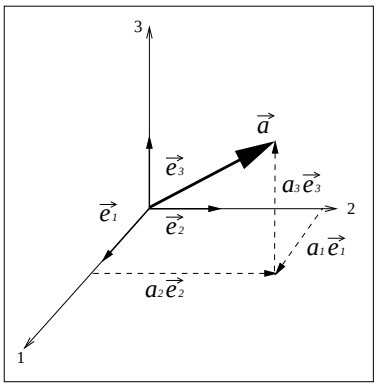
2. Assoziativität:
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \;=\; \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad , \qquad\qquad \lambda(\mu\vec{a}) \;=\; (\lambda\mu)\vec{a}$$

3. Distributivität:
$$(\lambda+\mu)\,\vec{a} \;=\; \lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \qquad , \qquad\qquad \lambda(\vec{a}+\vec{b}) \;=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

1.2 Komponentendarstellung von Vektoren

Zu einem Vektor $\vec{a}$ mit dem Betrag $|\vec{a}|$ läßt sich ein Einheitsvektor $\vec{e}=\vec{a}/\,|\vec{a}|$ konstruieren, der in Richtung von $\vec{a}$ zeigt und den Betrag $|\vec{e}|=1$ hat. Ein Koordinatensystem wird durch drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ definiert. Projiziert man einen Vektor $\vec{a}$ auf diese Einheitsvektoren, so ergeben sich die Vektoren $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$ und $a_3\vec{e}_3$, deren Addition wieder auf den Vektor $\vec{a}$ führt:

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3\,. \tag{1.1}$$



Aufgrund der Komponentendarstellung (1.1), beschreibt man den Vektor $\vec{a}$ durch das Tripel der Projektionslängen a_1, a_2 und a_3:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\,. \tag{1.2}$$

Die drei Einheitsvektoren entsprechen dann den Tripeln

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{1.3}$$

Der Betrag des Vektors $\vec{a}$ ergibt sich aus dem räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\,. \tag{1.4}$$

Die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl λ sind dann komponentenweise definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}, \tag{1.5}$$

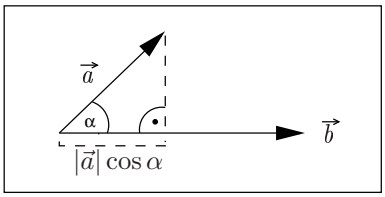
$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}\lambda\,. \tag{1.6}$$

1.3 Skalarprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird mit Hilfe des Skalarproduktes ein Skalar zugeordnet, indem das Produkt der Beträge der beiden Vektoren mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels α multipliziert wird:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha\,. \tag{1.7}$$

Anschaulich entspricht das Skalarprodukt der Länge der Projektion von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ multipliziert mit $|\vec{b}|$:



Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genügt den folgenden Axiomen:

1. Kommutativität:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Distributivität:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \qquad (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$$

Zudem gibt es zwei wichtige Spezialfälle des Skalarprodukts:

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander, so folgt aus der Definition (1.7):
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,, \quad \vec{a} \parallel \vec{b}\,. \tag{1.8}$$
Insbesondere ergibt sich hieraus im Falle $\vec{a} = \vec{b}$:
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\,. \tag{1.9}$$

2. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander, so gilt nach der Definition (1.7):
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \perp \vec{b}\,. \tag{1.10}$$

Demnach gilt für das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ eines Koordinatensystems mit zueinander orthogonalen Koordinatenachsen

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \,, \tag{1.11}$$

wobei das Kronecker-Symbol δ_{ij} definiert ist durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,; & i = j \\ 0\,; & i \neq j \end{cases} \,. \tag{1.12}$$

Es seien nun zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Komponentendarstellung (1.1) gegeben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \,, \qquad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i \,. \tag{1.13}$$

Dann läßt sich das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ mit Hilfe des Skalarproduktes der Einheitsvektoren (1.11) durch deren Komponenten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und b_3 ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &\overset{(1.11)}{=} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Hieraus lassen sich die folgenden Konsequenzen ablesen:

1. Bildet man das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a}$ mit einem Einheitsvektor $\vec{e}_i$, so ergibt sich nach den Gleichungen (1.2), (1.3) und (1.14) die Komponente

$$a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} \,. \tag{1.15}$$

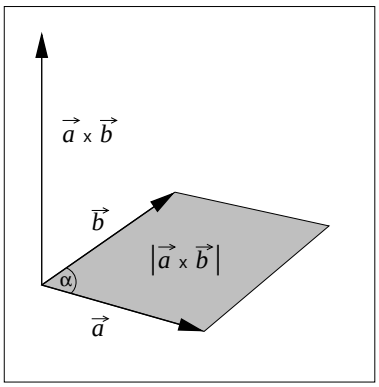
2. Das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selber führt nach den Gleichungen (1.2), (1.9) und (1.14) auf den räumlichen Pythagoras (1.4).

3. Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (1.4), (1.7) und (1.14) aus den Komponenten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 und b_3 berechnen:

$$\alpha = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}} \,. \tag{1.16}$$

1.4 Vektorprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird mit Hilfe des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor zugeordnet. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ steht dabei zu dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm senkrecht, so daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden:



Der Betrag des Vektorproduktes entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\alpha\,. \tag{1.17}$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genügt den folgenden Axiomen:

1. Antikommutativität:
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Distributivität:
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$. Im Falle $i = j$ ergibt sich wegen der Antikommutativität der Nullvektor:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}\,. \tag{1.18}$$

Im Falle $i \neq j$ dagegen ergibt sich ein Vektor, der nach Gleichung (1.17) den Betrag 1 besitzt. Ferner steht der Vektor $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ senkrecht auf $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$, so daß $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ und $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ ein Rechtssystem bilden:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2\,. \tag{1.19}$$

Die Gleichungen (1.18), (1.19) und die Antikommutativität des Vektorprodukts lassen sich zusammenfassen zu

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k\,, \tag{1.20}$$

wobei für die Definition des Levi-Cività-Tensors ϵ_{ijk} gilt:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ; \quad (i,j,k) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & ; \quad (i,j,k) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{1.21}$$

Der Levi-Cività-Tensor ist antisymmetrisch bezüglich der Permutation zweier Indizes:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}\,. \tag{1.22}$$

Außerdem ist er bei der zyklischen Permutation aller Indizes symmetrisch:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}\,. \tag{1.23}$$

Bildet man das Skalarprodukt von (1.20) mit einem Einheitsvektor, so ergibt sich wegen (1.11)

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk}\,. \tag{1.24}$$

Mit der Komponentendarstellung (1.13) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgt nun das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ aus den Gleichungen (1.18) und (1.19):

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{e}_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{e}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{1.25}$$

Dieses Ergebnis läßt sich kompakt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix} . \tag{1.26}$$

Statt die ausführliche Rechnung in Gleichung (1.25) durchzuführen, können wir die Rechnung auch abkürzen:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\vec{e}_i \times \vec{e}_j\,. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Die k-te Komponente des Vektorproduktes

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k=1}^{3} (\vec{a} \times \vec{b})_k \vec{e}_k \tag{1.28}$$

ergibt sich gemäß Gleichung (1.15) dadurch, daß man das Skalarprodukt von Gleichung (1.27) mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_k$ bildet:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_k &= \vec{e}_k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &\overset{(1.27)}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\ &\overset{(1.24)}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\epsilon_{kij} \\ \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_jb_k\,. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Wir können anhand der Komponentendarstellung (1.26) zeigen, daß das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1\,(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2\,(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3\,(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Daraus folgt entsprechend:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \overset{(1.30)}{=} 0\,. \tag{1.31}$$

Außerdem ergibt sich aus der Komponentendarstellung des Skalarproduktes (1.14) und des Vektorproduktes (1.26) mit Hilfe der Gleichung (1.9) und des räumlichen Pythagoras (1.4):

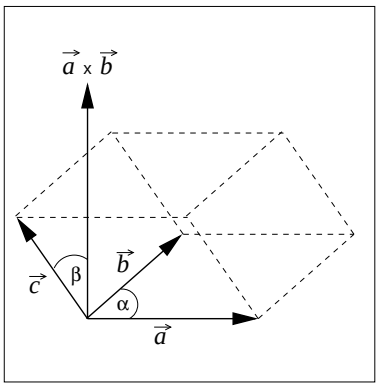
$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\\ &\quad +(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\\ &= \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}\,. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Mit Gleichung (1.7) läßt sich dann auf Gleichung (1.17) schließen:

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}-\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}\cos^2\alpha\\ &= \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}\sin^2\alpha\\ \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| &= |\vec{a}|\;|\vec{b}|\sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.5 Spatprodukt dreier Vektoren

Das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ soll so definiert sein, daß es gerade mit dem Volumen $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ desjenigen Parallelepipeds übereinstimmt, das von den drei Vektoren aufgespannt wird:



Somit läßt sich die Definition des Spatproduktes aus der Grundfläche des Parallelepipeds $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha$ und dessen Höhe $|\vec{c}|\cos\beta$ formulieren:

$$\begin{aligned}V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\\ &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha\,|\vec{c}|\cos\beta\,. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Für die Komponentendarstellung folgt aus Gleichung (1.14) und (1.26):

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2\\ a_3b_1 & - & a_1b_3\\ a_1b_2 & - & a_2b_1\end{pmatrix} \tag{1.35}$$

$$= c_1a_2b_3-c_1a_3b_2+c_2a_3b_1-c_2a_1b_3+c_3a_1b_2-c_3a_2b_1\,. \tag{1.36}$$

Das Spatprodukt kann deshalb auch als die Determinante derjenigen Matrix aufgefaßt werden, bei der die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die Zeilenvektoren darstellen:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\,. \tag{1.37}$$

Innerhalb des Spatproduktes kann man demnach die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zyklisch vertauschen:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = V(\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = V(\vec{c},\vec{a},\vec{b})\,. \tag{1.38}$$

Bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ein Rechtssystem, so wird das Volumen des Parallelepipeds positiv gerechnet, im Falle eines Linkssystems entsprechend negativ.

1.6 Zweifaches Vektorprodukt

Das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ist im Unterschied zum Spatprodukt wiederum ein Vektor. Da ein Vektorprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, ist das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}\times\vec{c}$. Das Vektorprodukt $\vec{b}\times\vec{c}$ ist wiederum senkrecht zu der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene. Deshalb muß das zweifache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene liegen:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{1.39}$$

Aus der Orthogonalität des zweifachen Vektorproduktes $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ zu $\vec{a}$ folgt dann nach Gleichung (1.39):

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\Big(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\Big) &= \beta(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \gamma(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 0 \\ \Rightarrow\ \beta = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{c}); &\qquad \gamma = -\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Setzt man das Ergebnis (1.40) in den Ansatz (1.39) ein, so folgt:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\left\{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\}. \tag{1.41}$$

Um den noch offenen Faktor α zu bestimmen, gehen wir nach den Gleichungen (1.14), (1.25) und (1.26) zur Komponentendarstellung über:

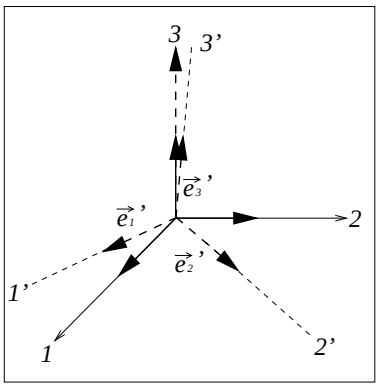
$$\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2\,(b_1c_2 - b_2c_1) & - & a_3\,(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3\,(b_2c_3 - b_3c_2) & - & a_1\,(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1\,(b_3c_1 - b_1c_3) & - & a_2\,(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}, \qquad (1.42) \\ \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= \begin{pmatrix} b_1\,(a_2c_2 + a_3c_3) & - & c_1\,(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2\,(a_3c_3 + a_1c_1) & - & c_2\,(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3\,(a_1c_1 + a_2c_2) & - & c_3\,(a_1b_1 + c_2b_2) \end{pmatrix}. \qquad (1.43) \end{aligned}$$

Der Vergleich von (1.42) und (1.43) mit der Gleichung (1.41) führt auf das Ergebnis α=1, so daß sich der Entwicklungssatz des zweifachen Vektorproduktes ergibt:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \tag{1.44}$$

1.7 Koordinatentransformation

Die Komponentendarstellung eines Vektors hat einerseits den Vorteil, daß sie übersichtlich ist, andererseits ist sie jedoch von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. In folgender Abbildung seien $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ die Einheitsvektoren des ursprünglichen Koordinatensystems und $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ die des transformierten Koordinatensystems:



Ein Vektor $\vec{x}$ kann nun nach den Einheitsvektoren des alten und des neuen Koordinatensystems entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \\ &= x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + x'_3\vec{e}'_3 \,. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten x_1, x_2 und x_3 bzw. x'_1, x'_2 und x'_3 sind gemäß Gleichung (1.15) Projektionen des Vektors $\vec{x}$ auf die jeweiligen Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} x_1 &= \vec{x}\cdot\vec{e}_1, & x_2 &= \vec{x}\cdot\vec{e}_2, & x_3 &= \vec{x}\cdot\vec{e}_3, \\ x'_1 &= \vec{x}\cdot\vec{e}'_1, & x'_2 &= \vec{x}\cdot\vec{e}'_2, & x'_3 &= \vec{x}\cdot\vec{e}'_3 \,. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ und $\vec{e}'_3$ nach den alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ entwickeln:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\vec{e}_j \,. \tag{1.47}$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= R_{11}\vec{e}_1 + R_{12}\vec{e}_2 + R_{13}\vec{e}_3 \,, \\ \vec{e}'_2 &= R_{21}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{23}\vec{e}_3 \,, \\ \vec{e}'_3 &= R_{31}\vec{e}_1 + R_{32}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3 \,. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Die dabei auftretenden Matrixelemente R_{ij} sind durch die Winkel α_{ij} zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i$ und $\vec{e}_j$ bestimmt:

$$R_{ij} = \vec{e}'_i\cdot\vec{e}_j = \cos\alpha_{ij} \,. \tag{1.49}$$

Aus der Forderung, daß sowohl die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$ als auch die alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gemäß Gleichung (1.11) orthogonal zueinander sind, läßt sich nach Gleichung (1.47) eine Einschränkung für die Matrixelemente R_{ij} ableiten:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_k\cdot\vec{e}'_l &= \left(\sum_{i=1}^{3} R_{ki}\vec{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} R_{lj}\vec{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{ki}R_{lj}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \\ &\overset{(1.11)}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{ki}R_{lj}\delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{3} R_{ki}R_{li} \\ &\overset{!}{=} \delta_{kl} \,. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Diese Bedingung besagt, daß die Matrix R orthonormal ist, d.h. daß die jeweiligen Zeilen bzw. Spalten orthonormal zueinander sind. Bezeichnet man mit $R^{\mathsf{T}} = (R_{ji})$ die zur Matrix $R = (R_{ij})$ transponierte Matrix, so läßt sich die Orthonormalitätseigenschaft (1.50) zur folgenden Matrizengleichung zusammenfassen:

$$R^{\mathsf{T}} R = R R^{\mathsf{T}} = I \,. \tag{1.51}$$

Setzen wir Gleichung (1.47) in Gleichung (1.45) ein, so erhalten wir die entsprechende Transformationsvorschrift für die Komponenten des Vektors $\vec{x}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i' \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i' \left(\sum_{j=1}^{3} R_{ij} \vec{e}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i' R_{ij} \right) \vec{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j \\
\Rightarrow x_j &= \sum_{i=1}^{3} x_i' R_{ij} \,.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Die Invertierung der Gleichung (1.52) führt auf:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} x_j R_{kj} &= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i' R_{ij} \right) R_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i' \left(\sum_{j=1}^{3} R_{ij} R_{kj} \right) \\
&\overset{(1.50)}{=} \sum_{i=1}^{3} x_i' \delta_{ik} \\
&= x_k' \\
\Rightarrow x_i' &= \sum_{j=1}^{3} R_{ij} x_j \,.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Dieses Ergebnis wird zur strengen mathematischen Definition eines Vektors herangezogen. Ein System von drei Elementen x_1, x_2 und x_3 ist dann ein Vektor, wenn er sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem gemäß (1.53) transformiert. Demnach stellen z.B. die Masse, die Zeit und die x-Koordinate nicht die Komponenten eines Vektors dar.

In der 1. Übungsaufgabe zeigen wir, daß das Skalarproduktes (1.14) und das Vektorprodukt (1.26) unter einer Koordinatentransformation invariant sind. Dabei leiten wir die Kontraktion zweier Levi-Cività-Tensoren ab

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \,, \tag{1.54}$$

mit der sich ebenfalls der Entwicklungssatz des zweifachen Vektorproduktes (1.44) beweisen läßt.

Kapitel 2

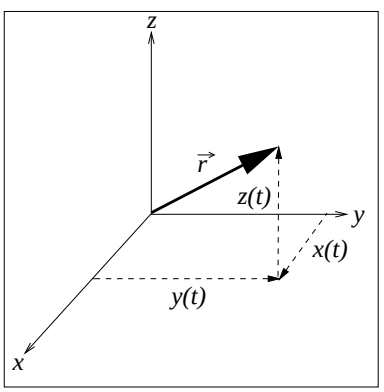
Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung. Dabei behandeln wir nur die Beschreibung der Bewegung und fragen zunächst nicht nach den Ursachen, d.h. nach den vorhandenen Kräften. Dies werden wir erst zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen der Dynamik diskutieren. Nach der Einführung des Ortsvektors, des Geschwindigkeitsvektors und des Beschleunigungsvektors einer Bahnkurve ersetzen wir die Zeit als Bahnparameter durch die Bogenlänge. Dies führt uns auf den Tangenten-, den Normalen- und den Binormaleneinheitsvektor, die ein begleitendes Dreibein entlang der Bahnkurve bilden. Wir diskutieren insbesondere die Frenet-Formeln, bei denen die Ableitungen der Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins nach der Bogenlänge auf die Krümmung und die Torsion der Bahnkurve führen.

2.1 Bahnkurve

Die Kinematik eines Massenpunktes besteht darin, dessen Bewegung zu beschreiben. Seine Lage können wir nur durch die relative Position zu einem anderen Körper angeben. In der Regel dient als ein solcher Bezugskörper die Erde bzw. das Zimmer, in dem wir uns befinden. Führen wir ein dreidimensionales Koordinatensystem ein, so können wir die momentane Lage des Körpers durch die Angabe dreier Koordinaten x, y und z und seinen gesammten Bewegungsablauf durch die den Koordinaten zugehörigen Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ darstellen. Der Kürze halber können wir auch einen zeitabhängigen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ einführen und die drei Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ zusammenfassen zu

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} . \tag{2.1}$$



Wir bilden nun die zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ und erhalten den Geschwindigkeits-

vektor

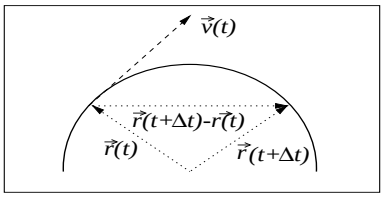
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\,. \tag{2.2}$$

Die zeitliche Ableitung des Ortsvektors (2.1) wird dabei so durchgeführt, daß jede einzelne Komponente differenziert wird. Deshalb lauten die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}\,. \tag{2.3}$$

Aus der Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten folgt unmittelbar, daß die Geschwindigkeit in Richtung der Bahntangenten weist:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\,. \tag{2.4}$$



Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors gibt die momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes an:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,. \tag{2.5}$$

Die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ führt nach Gleichung (2.2) auf den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\,. \tag{2.6}$$

Dessen einzelne Komponenten lauten mit Gleichung (2.3)

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}\,. \tag{2.7}$$

Höhere zeitliche Ableitungen spielen in der Mechanik eine untergeordnete Rolle.

2.2 Tangenteneinheitsvektor

Statt der Zeit t kann man auch jeden anderen Parameter zur Charakterisierung einer Bahnkurve verwenden. Besonders gebräuchlich ist die Bogenlänge s, die die Länge der Bahnkurve angibt, die entlang der gekrümmten Bahn von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkt aus gemessen wird. Betrachten wir eine infinitesimale Veränderung des Ortsvektors

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt\,, \tag{2.8}$$

so ist die infinitesimale Veränderung der Bogenlänge s als dessen Betrag definiert. Mit Gleichung (2.5) und (2.8) folgt somit:

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{v}(t)|\,dt = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}dt\,. \tag{2.9}$$

Integriert man diese Beziehung von einem Anfangspunkt t_0 bis zur Zeit t, so ergibt sich die Bogenlänge s als Funktion der Zeit t:

$$s(t) = \int_0^{s(t)} dS = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{x}(t'))^2 + (\dot{y}(t'))^2 + (\dot{z}(t'))^2}\, dt' \,. \tag{2.10}$$

Wir nehmen an, daß sich diese Beziehung eindeutig invertieren läßt

$$t = t(s) \tag{2.11}$$

und erhalten dann den Ortsvektor $\vec{r}$ als Funktion der Bogenlänge s:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}\,(t(s)) \,. \tag{2.12}$$

Bilden wir die Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \,, \tag{2.13}$$

so erhalten wir analog zu den Überlegungen bezüglich der Geschwindigkeit (2.4) wieder einen Vektor, der in Richtung der Bahntangenten weist. Aus der Kettenregel folgt ferner mit Gleichung (2.2), (2.9), (2.12) und (2.13)

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}\,(t(s))}{dt(s)} \frac{dt(s)}{ds} = \frac{\vec{v}\,(t(s))}{|\vec{v}\,(t(s))|} \,, \tag{2.14}$$

so daß $\vec{t}(s)$ den Betrag 1 besitzt:

$$\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) = 1 \,. \tag{2.15}$$

Deshalb bezeichnet man $\vec{t}(s)$ als Tangenteneinheitsvektor. Wir bemerken, daß $\vec{t}$ dimensionslos ist.

2.3 Normaleneinheitsvektor

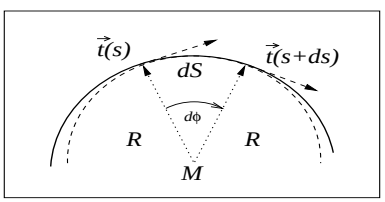
Wir konstruieren nun einen Einheitsvektor, der auf dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}(s)$ senkrecht steht. Differenzieren wir die Identität (2.15) nach der Bogenlänge s, so folgt, daß $\vec{t}(s)$ und $d\vec{t}(s)/ds$ senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = 0 \,. \tag{2.16}$$

Deshalb definieren wir den Normaleneinheitsvektor durch

$$\vec{n}(s) = \frac{\dfrac{d\vec{t}(s)}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|} \,. \tag{2.17}$$

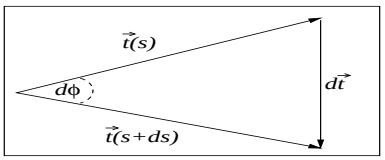
Er besitzt die beiden gewünschten Eigenschaften $\vec{n}(s) \perp \vec{t}(s)$ und $|\vec{n}(s)| = 1$. Der Betrag von $d\vec{t}(s)/ds$ hat eine anschauliche Bedeutung: Hierzu zeichnen wir für s und $s+ds$ die Tangenteneinheitsvektoren $\vec{t}(s)$ und $\vec{t}(s+ds)$ an die Punkte $\vec{r}(s)$ und $\vec{r}(s+ds)$ der Bahnkurve. Zeichnen wir Geraden senkrecht zu $\vec{t}(s)$ und $\vec{t}(s+ds)$ durch die Punkte $\vec{r}(s)$ und $\vec{r}(s+ds)$, so schneiden sich diese in einem Punkt M. Dann läßt sich um diesen Punkt M ein Kreis mit dem Radius R legen, so daß die Bahnkurve zwischen $\vec{r}(s)$ und $\vec{r}(s+ds)$ auf der Kreislinie liegt:



Die infinitesimale Veränderung der Bogenlänge ist dann gegeben durch

$$ds = R\, d\varphi\,. \tag{2.18}$$

Betrachten wir andererseits die Tangenteneinheitsvektoren bei s und $s + ds$, so vollziehen diese eine Richtungsänderung:



Die Winkeländerung $d\varphi$ ist deshalb mit dem Betrag der Änderung des Tangenteneinheitsvektors identisch:

$$d\varphi = \left|d\vec{t}\right|\,. \tag{2.19}$$

Aus der Gleichung (2.18) und (2.19) ergibt sich dann der Radius R des Kreises zu

$$R = \frac{1}{\left|\dfrac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|}\,. \tag{2.20}$$

Das Reziproke des Krümmumgsradius R bezeichnet man als Krümmung

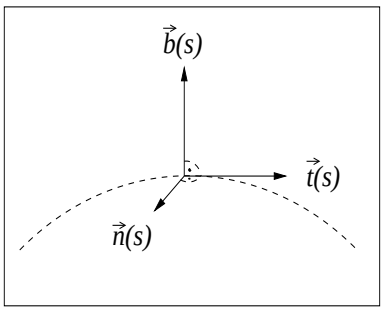
$$\kappa = \frac{1}{R} = \left|\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right|\,. \tag{2.21}$$

2.4 Begleitendes Dreibein

Man kann einer Bahnkurve ein begleitendes Dreibein zuordnen, das aus dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}(s)$, dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(s)$ und dem Binormaleneinheitsvektor

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \tag{2.22}$$

besteht:



Der Geschwindigkeitsvektor läßt sich unmittelbar nach Gleichung (2.2), (2.9) und (2.13) in das Dreibein zerlegen:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{ds(t)}\frac{ds(t)}{dt} = v(t)\vec{t}(s(t))\,. \tag{2.23}$$

Demnach zeigt der Geschwindigkeitsvektor in die Tangentenrichtung der Bahn. Die Zerlegung des Beschleunigungsvektors ergibt sich entsprechend Gleichung (2.6), (2.17), (2.20) und (2.23):

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{v(t)\vec{t}(s(t))\right\} = \dot{v}(t)\vec{t}(s(t)) + v(t)\frac{d\vec{t}(s(t))}{ds(t)}\frac{ds(t)}{dt} \\ &= \dot{v}(t)\vec{t}(s(t)) + \frac{v(t)^2}{R}\vec{n}(s(t))\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Der Beschleunigungsvektor besitzt demnach eine Komponente in Tangentialrichtung und eine in Normalenrichtung. Die Tangentialbeschleunigung

$$a_{\vec{t}} = \vec{a} \cdot \vec{t} = \dot{v} \tag{2.25}$$

ist unmittelbar einsichtig, da sie auch bei einer rein linearen Bewegung auftritt. Die Normalenbeschleunigung

$$a_{\vec{n}} = \vec{a} \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{R} \tag{2.26}$$

tritt dagegen bei einer nicht geradlinig verlaufenden Bewegung auf. Sie entspricht der Zentripetalbeschleunigung auf einer Kreislinie mit dem Radius R.

2.5 Binormaleneinheitsvektor

Wir untersuchen nun die Bedeutung des Binormaleneinheitsvektors (2.22). Hierzu betrachten wir zunächst eine ebene Bahnkurve, bei der der Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}(s)$ und der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(s)$ in derselben Ebene liegen. In diesem speziellen Fall ist offensichtlich der Binormaleneinheitsvektor $\vec{b}(s)$ bezüglich der Bogenlänge s konstant und steht senkrecht zur fraglichen Ebene. Im allgemeinen Fall wird sich der Binormaleneinheitsvektor $\vec{b}(s)$ mit der Bogenlänge s verändern, so daß dies ein Maß für die Schraubung der Bahnkurve in die dritte Dimension hinein ist.

Wir betrachten nun die Ableitung des Binormaleneinheitsvektors $\vec{b}(s)$ bezüglich der Bogenlänge s. Analog zu (2.15) und (2.16) steht $d\vec{b}(s)/ds$ als Ableitung eines Einheitsvektors senkrecht auf $\vec{b}(s)$. Andererseits folgt aus Gleichung (2.17) und der Definition (2.22):

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \vec{t}(s) \times \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \,. \tag{2.27}$$

Damit steht $d\vec{b}(s)/ds$ auch senkrecht auf $\vec{t}(s)$. Die Richtung von $d\vec{b}(s)/ds$ ist deshalb durch den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(s)$ vorgegeben:

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = -\tau \vec{n}(s) \,. \tag{2.28}$$

Nach dem oben Erläuterten ist damit τ ein Maß für die Schraubung der Bahnkurve und wird als Torsion bezeichnet.

2.6 Frenetsche Formeln

Die Veränderungen des begleitenden Dreibeins $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$ und $\vec{b}(s)$ bezüglich der Bogenlänge s lassen sich nach diesem Dreibein entwickeln. Die dabei entstehenden Beziehungen werden Frenetsche Formeln bezeichnet. Zwei dieser Frenetschen Formeln wurden schon in den Gleichungen (2.17), (2.21) und (2.28) beschrieben. Nachzutragen ist nun noch eine Formel für die Veränderung des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}(s)$. Hierzu bilden wir $\vec{t}(s) \times \vec{b}(s)$ und wenden den Entwicklungssatz des zweifachen Vektorproduktes (1.44) an:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) \times \vec{b}(s) &= \vec{t}(s) \times \big(\vec{t}(s) \times \vec{n}(s)\big) \\ &= \vec{t}(s)\,\big(\vec{t}(s) \cdot \vec{n}(s)\big) - \vec{n}(s)\,\big(\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s)\big) \,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Da der Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}(s)$ normiert ist und senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}(s)$ steht, reduziert sich die Gleichung (2.29) auf

$$\vec{n}(s) = \vec{b}(s) \times \vec{t}(s) \,. \tag{2.30}$$

Bilden wir dagegen $\vec{n}(s) \times \vec{b}(s)$, so folgt mit Hilfe des Entwicklungssatzes des zweifachen Vektorproduktes (1.44) ganz analog:

$$\begin{aligned} \vec{n}(s) \times \vec{b}(s) &= \vec{n}(s) \times \left(\vec{t}(s) \times \vec{n}(s)\right) \\ &= \vec{t}(s)\,(\vec{n}(s) \cdot \vec{n}(s)) - \vec{n}(s)\left(\vec{t}(s) \cdot \vec{n}(s)\right) = \vec{t}(s)\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Demnach handelt es sich bei den Gleichungen (2.22), (2.30) und (2.31) gerade um dieselben Formeln für das begleitende Dreibein, wie in Gleichung (1.19) für die Einheitsvektoren des Koordinatensystems. Wir differenzieren nun die Gleichung (2.30) mit Hilfe der Gleichungen (2.17), (2.21), (2.22), (2.28) und (2.31) nach der Bogenlänge s:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}(s)}{ds} &= \frac{d\vec{b}(s)}{ds} \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \\ &= -\tau\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) + \kappa\vec{b}(s) \times \vec{n}(s) \\ \Rightarrow \frac{d\vec{n}(s)}{ds} &= \tau\vec{b}(s) - \kappa\vec{t}(s)\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Damit lassen sich die Ergebnisse zum begleitenden Dreibein durch die folgende Übersicht zusammenfassen:

	Bezeichnung	Definition	Frenet-Formel
$\vec{t}$	Tangenteneinheitsvektor	$\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$	$\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n}$
$\vec{n}$	Normaleneinheitsvektor	$\vec{n} = \dfrac{d\vec{t}}{ds}\dfrac{1}{\kappa}$	$\dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}$
$\vec{b}$	Binormaleneinheitsvektor	$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$	$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n}$

Durch das begleitende Dreibein werden drei Ebenen festgelegt:

$\vec{t}, \vec{n}$: Schmiegebene
$\vec{n}, \vec{b}$: Normalebene
$\vec{b}, \vec{t}$: rektifizierende Ebene

In der 2. Übungsaufgabe untersuchen wir das begleitende Dreibein für eine Schraubenkurve. Dabei werden mit Hilfe der Frenet-Formeln die Krümmung κ und die Torsion τ der Schraubenkurve berechnet.

Kapitel 3

Dynamik

Die Dynamik ist die Lehre von den Kräften. Die Dynamik untersucht, welchen Einfluß die Kräfte auf die Bewegung des Massepunktes ausüben. Im folgenden diskutieren wir zunächst die Grundgesetze der Dynamik, die durch die vier Newtonschen Axiome formuliert werden. Dann führen wir die Arbeit als Wegintegral der Kraft ein und behandeln konservative Kraftfelder, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist. Anschließend erläutern wir die Erhaltungssätze der Energie, des Impulses und des Drehimpulses sowie den Flächensatz von Zentralkräften.

3.1 Erstes Axiom: Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn keine Kräfte von Außen auf ihn einwirken.

- Ob eine Bewegung gleiförmig verläuft oder nicht, hängt natürlich vom Bezugssystem ab. Die Gültigkeit des ersten Newtonschen Axioms ist in einem Intertialsystem gegeben. Man definiert also ein Inertialsystem als ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Massepunkt gleichförmig bewegt oder stillsteht.
- Gibt es ein solches Inertialsystem, so sind alle gleichförmig dazu bewegten Bezugssysteme ebenfalls Inertialsysteme. Dabei sind alle Inertialsysteme zur Beschreibung der Bewegung gleichberechtigt. Es ist nicht möglich, ein ausgezeichnetes, absolutes Inertialsystem festzulegen.
- Ein rotierendes System stellt kein Inertialsystem dar. In ihm müssen Scheinkräfte eingeführt werden, um eine Bahnbewegung erklären zu können. Aber man kann beispielsweise ein mit der sich drehenden Erde verbundenes Bezugssystem für die meisten Versuche näherungsweise als Inertialsystem benutzen.

3.2 Zweites Axiom: Grundgleichung der Dynamik

Die auf einen Körper wirkende Kraft $\vec{F}$ ist proportional zu seiner Beschleunigung $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \overset{(2.6)}{=} m\ddot{\vec{r}}. \tag{3.1}$$

Die dabei auftretende Proportionalitätskonstante nennt man die Masse des Körpers.

- Verschwindet die äußere Kraft, so reduziert sich das zweite auf das erste Axiom.
- In der Mechanik kümmert man sich nicht um die Herkunft der Kräfte. Es kann sich hierbei um Gravitationskräfte, elektrische und magnetische Kräfte oder Reibungskräfte handeln. In der Mechanik werden nur die Auswirkungen dieser Kräfte untersucht.

- Bei der im Newtonschon Grundgesetz (3.1) auftretenden Masse m handelt es sich eigentlich um die träge Masse m_t. Sie stellt eine Eigenschaft des Massepunktes dar, sich einer Beschleunigung durch die Einwirkung einer Kraft zu widersetzen. Die träge Masse ist zu unterscheiden von der schweren Masse, mit der ein Körper auf der Erde die Anziehungskraft

$$\vec{F} = m_s \vec{g} \tag{3.2}$$

erfährt. Hierbei bezeichnet $\vec{g}$ die Erdbeschleunigung mit dem Wert $|\vec{g}| = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Experimentell stellt man mit hoher Genauigkeit fest, daß schwere und träge Masse übereinstimmen:

$$m_t = m_s\,. \tag{3.3}$$

Schon Galileo Galilei hat (3.3) in der Form festgestellt, daß alle Körper gleich schnell fallen.

- Mit Hilfe des Newtonschen Grundgesetzes (3.1) kann man bei bekannter Kraft $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ die Bahnkurve ausrechnen, indem man die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\vec{r}(t)$ löst. Umgekehrt kann man aber auch aus einer bekannten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit Hilfe des Newtonschen Grundgesetzes (3.1) die zugrunde liegende Kraft bestimmen (vgl. 5. Übungsaufgabe).

- Da die Masse eines Massenpunktes in der Regel eine Konstante darstellt, kann man das Newtonsche Grundgesetz (3.1) mit Hilfe des Impulses

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.4}$$

auch auf die allgemeinere Form

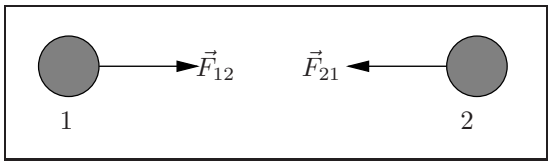
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.5}$$

bringen. Es gibt einige mechanische Probleme, wie zum Beispiel den Flug einer Rakete oder das Herunterfallen eines Regentropfens, bei denen die Masse m des Körpers nicht zeitlich konstant ist. In diesen Fällen ist als Grundgesetz (3.5) und nicht (3.1) zu verwenden.

3.3 Drittes Axiom: Wechselwirkungsgesetz

Übt ein Körper 2 auf einen Körper 1 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so übt umgekehrt der Körper 1 auf den Körper 2 die Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ aus:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}\,. \tag{3.6}$$

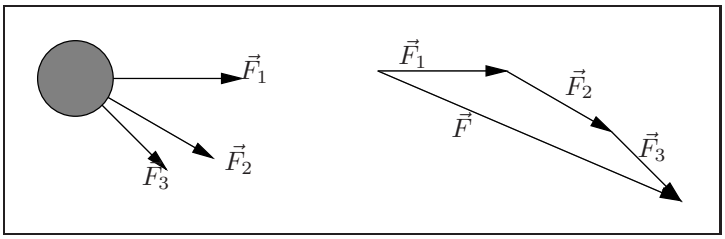


Die zwischen zwei Körpern wirkenden Kräfte sind dem Betrage nach gleich groß, besitzen aber die entgegengesetzte Richtung. Ein typisches Beispiel für dieses Gesetz "actio = – reactio" ist die gravitative Anziehungskraft zwischen Sonne und Erde in der Mechanik oder die elektrische Anziehungs- bzw. Abstoßungskraft zwischen Ladungen in der Elektrostatik.

3.4 Viertes Axiom: Superpositionsprinzip der Kräfte

Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte einwirken, so addieren sich diese vektoriell zur Gesamtkraft:

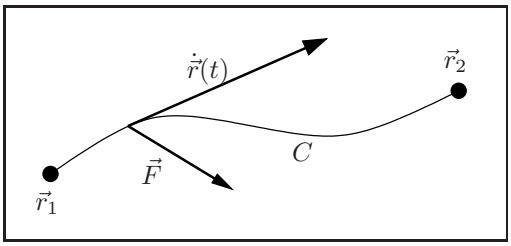
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i\,. \tag{3.7}$$



3.5 Arbeit und kinetische Energie

Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf einen Massenpunkt, der sich auf einer Bahnkurve C vom Punkt $\vec{r}_1$ zum Punkt $\vec{r}_2$ bewegt, so verrichtet die Kraft die Arbeit

$$W_{12}(C) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \,. \tag{3.8}$$



Wir betrachten nun die Situation, daß die Kraft $\vec{F}$ gemäß dem Newtonschen Grundgesetz (3.1) die Bahnkurve C verursacht. Einsetzen von (3.1) in (3.8) führt auf

$$\begin{aligned} W_{12}(C) &= m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\dot{\vec{r}}(t)}{dt} \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}(t)^2 \right\} dt = \frac{m}{2} \left[\dot{\vec{r}}(t)^2 \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}(t_2)^2 - \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}(t_1)^2 \,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die entlang des Weges C von 1 nach 2 geleistete Arbeit ist also gerade die Differenz der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}(t)^2 \tag{3.10}$$

am Endpunkt $\vec{r}_2$ und am Anfangspunkt $\vec{r}_1$.

Bisher wurde über die auf den Massenpunkt wirkende Kraft nichts vorausgesetzt. Im allgemeinen ist die Kraft eine Funktion vom Ort $\vec{r}$, der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und der Zeit t

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{3.11}$$

und die Arbeit $W_{12}(C)$ hängt vom Weg C ab. Dies bedeutet, daß entlang zwei verschiedener Wege A und B, die vom Anfangspunkt $\vec{r}_1$ zum Endpunkt $\vec{r}_2$ führen, im allgemeinen eine unterschiedliche Arbeit verrichtet wird:

$$W_{12}(A) \neq W_{12}(B) \,. \tag{3.12}$$

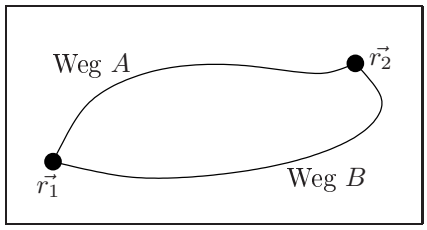
3.6 Konservatives Kraftfeld

Wir wollen nun speziell solche Kräfte betrachten, die nur vom Ort $\vec{r}$ abhängen

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{3.13}$$

und bei denen die Arbeit wegunabhängig ist. Letzteres besagt, daß für zwei beliebige Wege A und B von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ gilt

$$\int\limits_{\substack{\vec{r}_1\\A}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\substack{\vec{r}_1\\B}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \tag{3.14}$$



Dann können wir aus (3.14) folgern, daß

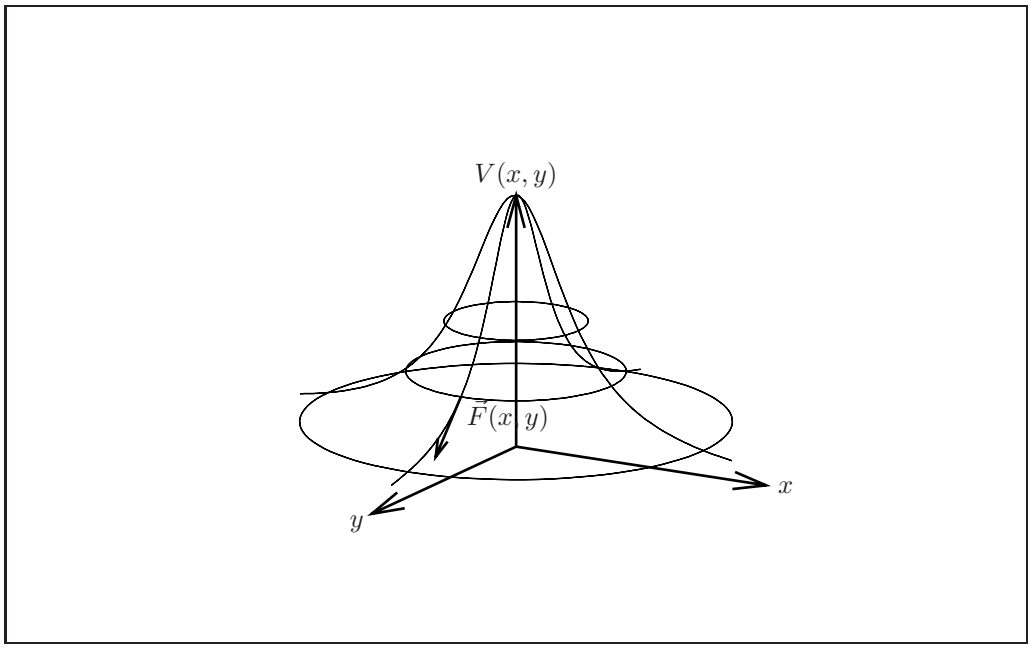
$$\int\limits_{\substack{\vec{r}_1\\A}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int\limits_{\substack{\vec{r}_1\\B}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\substack{\vec{r}_1\\A}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int\limits_{\substack{\vec{r}_2\\B}}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \equiv \vec{0}\,. \tag{3.15}$$

Demnach muß das Umlaufintegral der Kraft über eine beliebige geschlossene Kurve verschwinden. Kräfte, die den beiden Bedingungen (3.13) und (3.15) gehorchen, bezeichnet man als konservative Kräfte bzw. konservative Kraftfelder.

Wir zeigen nun, daß ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Wegunabhängigkeit der Arbeit darin besteht, daß sich das Kraftfeld als Gradient eines Skalarfeldes, des Potentials $V(\vec{r})$, darstellen läßt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\mathrm{V}(\tilde{\mathrm{r}}) = -\tilde{\nabla}\mathrm{V}(\tilde{\mathrm{r}})\,. \tag{3.16}$$

Hierbei wurde das Minuszeichen aus Konventionsgründen eingeführt. Veranschaulicht man sich das Potential als Gebirgslandschaft, so zeigt $\vec{F}$ in Richtung des stärksten Potentialgefälles:



Außerdem erinnern wir an die Definition des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$. Es handelt sich um einen Vektor, dessen einzelne Komponenten aus den ersten partiellen Ableitungen nach den Koordinaten bestehen:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \tag{3.17}$$

Deshalb lautet (3.16) in Komponentenschreibweise

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} . \tag{3.18}$$

Zunächst zeigen wir, daß das Kriterium hinreichend ist, d.h. aus (3.16) folgt (3.15). Für das Umlaufintegral einer Kraft (3.16) erhalten wir:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\oint \mathrm{grad\,V(\tilde{r})} \cdot \mathrm{d\tilde{r}} = -\oint \mathrm{dV(\tilde{r})} \equiv 0\,, \tag{3.19}$$

da für das Kurvenintegral des Gradientenfeldes gilt

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{grad\,V(\tilde{r})} \cdot \mathrm{d\tilde{r}} \overset{(3.17)}{=} \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \left\{ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz} \right\} = \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \mathrm{dV} = \mathrm{V(\tilde{r}_2) - V(\tilde{r}_1)}\,. \tag{3.20}$$

Nun zeigen wir, daß das Kriterium notwendig ist, d.h. aus (3.15) folgt (3.16). Hierzu definieren wir für das gegebene Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ das Skalarfeld

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' \,. \tag{3.21}$$

Da die Arbeit des Kraftfeldes wegunabhängig ist, hängt das Skalarfeld nur vom Anfangspunkt $\vec{r}_0$ und vom Endpunkt $\vec{r}$, nicht aber vom gewählten Weg zwischen $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_1$ ab. Wir berechnen die partielle Ableitung des Skalarfeldes (3.21) nach x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} &\overset{(3.21)}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' \\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\epsilon\vec{e}_x}\vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'\right\} \\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\epsilon\vec{e}_x}\vec{F}(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt aus (3.22):

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\vec{e}_x\cdot\vec{F}(\vec{r}+\xi\epsilon\vec{e}_x),\quad \xi\in[0,1]\,. \tag{3.23}$$

Führt man den Grenzübergang $\epsilon\downarrow 0$ durch, so geht (3.23) über in

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = -F_x(\vec{r})\,. \tag{3.24}$$

Analog verfährt man mit den anderen partiellen Ableitungen nach y und z, so daß sich insgesamt (3.16) ergibt.

Wie sieht man nun einem vorgegebenen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ an, ob man es gemäß (3.16) als Gradient eines Skalarfeldes schreiben kann? Dafür kann man eine einfache, analytisch nachprüfbare Regel angeben, wenn man den Stokesschen Satz

$$\oint_{\partial A}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \iint_A \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{f} \tag{3.25}$$

verwendet. Der Flächenelementvektor $d\vec{f}$ steht senkrecht auf dem Flächenelement, und sein Betrag ist dessen Flächeninhalt. Mit ∂A ist der Rand der geschlossenen Fläche A gemeint. Wir erinnern uns an die Definition der Rotation:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) \overset{(1.25),(3.17)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Ist das Umlaufintegral eines Kraftfeldes wegunabhängig, so gilt (3.15) für jede geschlossene Kurve und damit folgt aus (3.25)

$$\iint_A \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = 0 \tag{3.27}$$

für jede Fläche A. Deshalb muß gelten:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}\,. \tag{3.28}$$

Umgekehrt folgt natürlich aus (3.28) mit Hilfe des Stokesschen Satzes (3.25), daß das Umlaufintegral des Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ für jede geschlossene Kurve verschwindet. Demnach sind die drei Bedingungen (3.15), (3.16) und (3.28) zueinander äquivalent.

3.7 Energieerhaltungssatz

Aus den Beziehungen (3.8)–(3.10) folgt für konservative Kraftfelder (3.16) mit der Eigenschaft (3.20) der Energieerhaltungssatz

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \,. \tag{3.29}$$

Er besagt, daß die Summe aus kinetischer und potentieller Energie während der Bewegung erhalten bleibt:

$$E = T + V = \text{konstant} \,. \tag{3.30}$$

Mit Hilfe von (3.10) und $V = V(\vec{r})$ nimmt der Erhaltungssatz (3.30) die folgende Form an:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}(t)^2 + V(\vec{r}(t)) \,. \tag{3.31}$$

Wir untersuchen die Bedeutung des Energieerhaltungssatzes in einer Dimension, wo (3.31) übergeht in:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t)) \,. \tag{3.32}$$

Wir lösen (3.32) nach $\dot{x} = dx/dt$ auf, und erhalten

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \,. \tag{3.33}$$

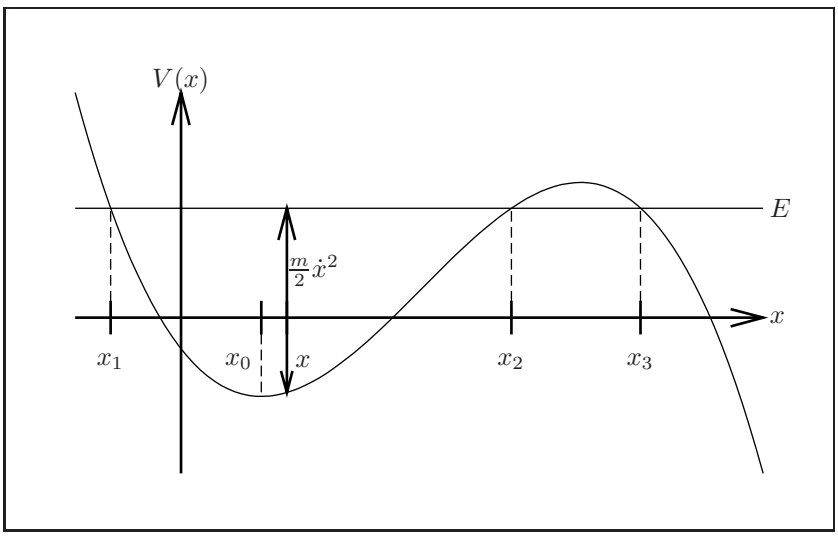
Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \,. \tag{3.34}$$

Die beiden Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ legen dabei gemäß (3.32) die Energie fest:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 + V(x_0) \,. \tag{3.35}$$

Durch (3.34) wird die Funktion $t = t(x)$ festgelegt, deren Invertierung dann auf die gesuchte Trajektorie $x(t)$ führt. Das Integral in (3.34) kann nur in ganz wenigen Fällen, wie zum Beispiel dem harmonischen Oszillator oder dem harmonischen Oszillator mit Zentrifugalbarriere (vgl. 6. Übungsaufgabe), analytisch gelöst werden. Im allgemeinen Fall läßt sich aber die Trajektorie zumindest qualitativ anhand des Graphen von $V(x)$ diskutieren:



Der vertikale Abstand zwischen $V(x)$ und der Horizontalen E gibt die kinetische Energie $m\dot{x}^2/2$ des Teilchens an. Wählt man die Bewegungsrichtung, d.h. $\dot{x} > 0$ oder $\dot{x} < 0$ aus, so kann die Änderung von $\dot{x}^2$ aus der des vertikalen Abstandes abgelesen werden. Nähert man sich einem Schnittpunkt von $V(x)$ mit der Horizontalen E, so geht $\dot{x} \to 0$. Diese Punkte werden Umkehrpunkte genannt, da sich dort die Bewegungsrichtung umkehrt. Verläuft die Bewegungsrichung zwischen zwei Umkehrpunkten x_1 und x_2, so ergibt sich eine Schwingungsdauer mit der Periode

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \,. \tag{3.36}$$

Der Bereich $x_2 < x < x_3$ ist dagegen unzugänglich. An den Stellen x_0 mit $V'(x_0) = 0$ liegt eine statische Lösung $x(t) = x_0$ vor, für die $\dot{x}(t) = 0$ gelten muß. Diese Gleichgewichtslösung ist bei einem Minimum des Potentials stabil, bei einem Maximum aber labil.

3.8 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Wirkt auf ein Teilchen keine äußere Kraft, so ist sein Impuls erhalten:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \overset{(3.5)}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \text{konstant} \,. \tag{3.37}$$

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.1) für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes vektoriell mit $\vec{r}(t)$:

$$m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) \,. \tag{3.38}$$

Wir definieren den Drehimpuls des Teilchens durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \overset{(3.4)}{=} m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{3.39}$$

und das auf das Teilchen wirkende Drehmoment durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,. \tag{3.40}$$

Beide Größen $\vec{L}$ und $\vec{M}$ beziehen sich dabei auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems. Bei einer Verschiebung des Inertialsystems verändern sich demnach $\vec{L}$ und $\vec{M}$, während sich $\vec{p}$ und $\vec{F}$ nicht verändern. Bilden wir die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\vec{L}$, so folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \overset{(3.39)}{=} m\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) + m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) \overset{(3.38)}{=} \vec{r} \times \vec{F} \overset{(3.40)}{=} \vec{M} \,. \tag{3.41}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also gleich dem Drehmoment. Hieraus ergibt sich unmittelbar der Drehimpulserhaltungssatz. Wenn das Drehmoment verschwindet, dann ist der Drehimpuls erhalten:

$$\vec{M} = \vec{0} \quad \overset{(3.41)}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant} \,. \tag{3.42}$$

Als Beispiel für die Anwendung des Energie- und des Drehimpulserhaltungssatzes behandeln wir in der 7. Übungsaufgabe den Vorbeiflug eines Meteors an der Erde.

3.9 Zentralkräfte

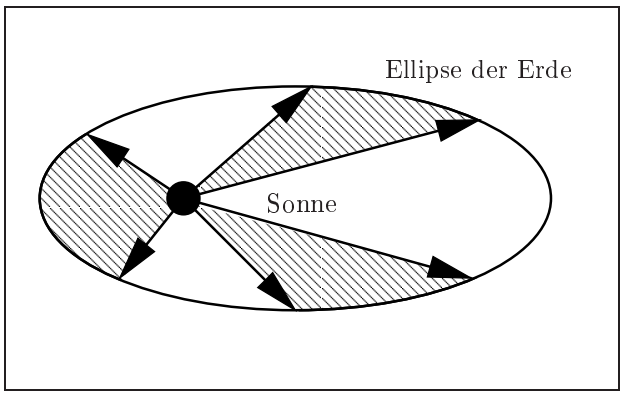
Das Drehmoment $\vec{M}$ verschwindet trivialerweise, wenn keine Kraft $\vec{F}$ angreift. Für $\vec{F} \neq \vec{0}$ kann $\vec{M}$ nur dann gleich Null sein, wenn $\vec{F}$ parallel zu $\vec{r}$ ist. Die Kraft muß also entgegengesetzt zum Zentrum des Bezugssystems wirken, d.h., es muß sich um eine Zentralkraft handeln:

$$\vec{F} = \vec{r} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \,. \tag{3.43}$$

Nach (3.40) und (3.43) ist dann der Drehimpulserhaltungssatz erfüllt. Hieraus schließen wir, daß sich $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ und damit die gesamte Bahnkurve in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls befindet. Beispielsweise handelt es sich bei der Newtonschen Gravitationskraft zwischen zwei Massen M_1 und M_2

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 M_2}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{3.44}$$

um eine solche Zentralkraft (vgl. 4. Übungsaufgabe). Tatsächlich bewegt sich die Erde auf ihrer Ellipsenbewegung mit der Sonne in einem ihrer beiden Brennpunkte in einer Ebene (1. Keplersches Gesetz):



Wir betrachten die Fläche dA, die der Fahrstrahl pro Zeit überstreicht:

$$dA = \frac{1}{2}|d\vec{r} \times \vec{r}|\,. \tag{3.45}$$

Der Vergleich von (3.39) und (3.45) führt auf

$$|\vec{L}| = 2m\left|\frac{dA}{dt}\right|\,. \tag{3.46}$$

Wenn der Drehimpuls erhalten bleibt, überstreicht der Fahrstrahl in gleichen Zeiten die gleiche Fläche (Flächensatz bzw. 2. Keplersches Gesetz).

Kapitel 4

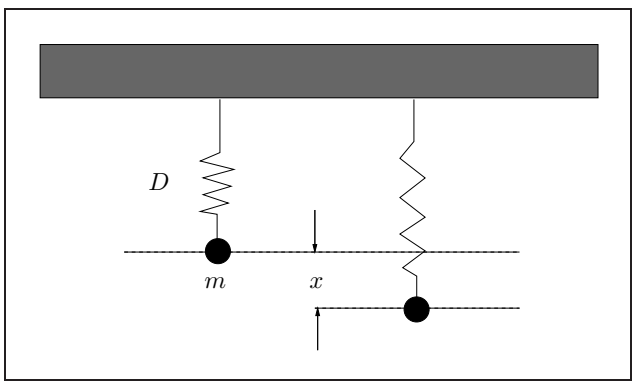
Harmonischer Oszillator

Viele Systeme können Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen. Wenn die Auslenkungen aus der Ruhelage hinreichend klein sind, dann sind die Schwingungen harmonisch und werden durch einen harmonischen Oszillator beschrieben. Im folgenden behandeln wir im einzelnen die harmonische, die gedämpfte und die erzwungene Schwingung. Dabei lösen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators für eine beliebige zeitabhängige Kraft mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion.

4.1 Harmonische Schwingung

Wenn man einen an einer Schraubenfeder aufgehängten Massenpunkt der Masse m aus der Ruhelage um ein Stück x verschiebt, so wirkt auf den Massenpunkt eine Kraft in Richtung der Ruhelage, die nach dem Hookschen Gesetz proportional zur Auslenkung x ist:

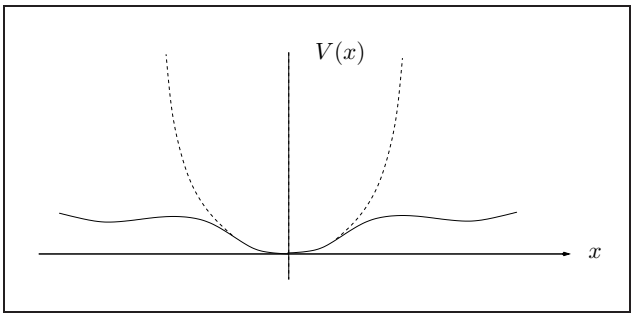
$$F_H(x) = -Dx\,, \tag{4.1}$$



wobei D die Federkonstante bezeichnet. Es handelt sich hierbei um eine konservative Kraft, da der negative Gradient des Potentials

$$V(x) = -\int_0^x F_H(x')\,dx' = \frac{1}{2}Dx^2 \tag{4.2}$$

auf das Hooksche Gesetz führt. Generell lassen sich Potentiale mit einem Minimum in der direkten Umgebung des Minimums durch ein solches Potential (4.2) nähern:



Entwickelt man nämlich das Potential $V(x)$ nach Taylor um das Minimum bei $x_0 = 0$

$$V(x) = V(0) + V'(0)\,x + \frac{1}{2}V''(0)\,x^2 + \dots\,, \tag{4.3}$$

so muß $V'(0) = 0$ am Minimum gelten und (4.3) reduziert sich für kleine Auslenkungen auf (4.2). Dabei entspricht die Federkonstante D der Krümmung $V''(0)$ des Potentials $V(x)$ am Minimum $x_0 = 0$. Setzt man das Kraftgesetz (4.1) in die Newtonsche Grundgleichung (3.1) ein, so entsteht für die Auslenkung x eine homogene, lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,, \tag{4.4}$$

wobei die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators gegeben ist durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}\,. \tag{4.5}$$

Die Eigenfrequenz ω_0 ist also um so größer, je größer die Federkonstante D und je kleiner die Masse m ist. Das übliche Lösungsverfahren für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besteht im Exponentialansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}\,. \tag{4.6}$$

Einsetzen von (4.6) in (4.4) führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{4.7}$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_\pm = \pm i\omega_0\,. \tag{4.8}$$

Demnach besitzt die Differentialgleichung (4.4) die beiden Fundamentallösungen

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t}, \qquad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}\,. \tag{4.9}$$

Eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen führt auf die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.4):

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}\,. \tag{4.10}$$

Statt der komplexen Fundamentallösungen (4.9) kann man auch zwei reelle Fundamentallösungen angeben. Hierzu verwendet man die Eulersche Formel

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{4.11}$$

in (4.10) und erhält

$$x(t) = b_1 \cos\omega_0 t + b_2 \sin\omega_0 t \tag{4.12}$$

mit den Koeffizienten

$$b_1 = a_1 + a_2, \qquad b_2 = i(a_1 - a_2)\,. \tag{4.13}$$

Die beiden reellen Fundamentallösungen lauten demnach

$$x_1(t) = \cos\omega_0 t, \qquad x_2(t) = \sin\omega_0 t\,. \tag{4.14}$$

Die noch unbekannten Koeffizienten b_1, b_2 in (4.12) lassen sich durch die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{4.15}$$

festlegen. Wir erhalten dabei

$$b_1 = x_0, \qquad b_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\,, \tag{4.16}$$

so daß die allgemeine Lösung (4.12) übergeht in

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\,. \tag{4.17}$$

Man kann (4.17) auch auf die Form

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta) = A\cos\theta\cos\omega_0 t + A\sin\theta\sin\omega_0 t \tag{4.18}$$

bringen. Der Vergleich von (4.17) und (4.18) führt auf

$$A\cos\theta = x_0, \qquad A\sin\theta = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\,, \tag{4.19}$$

so daß sich die Amplitude A ergibt zu

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}\,, \tag{4.20}$$

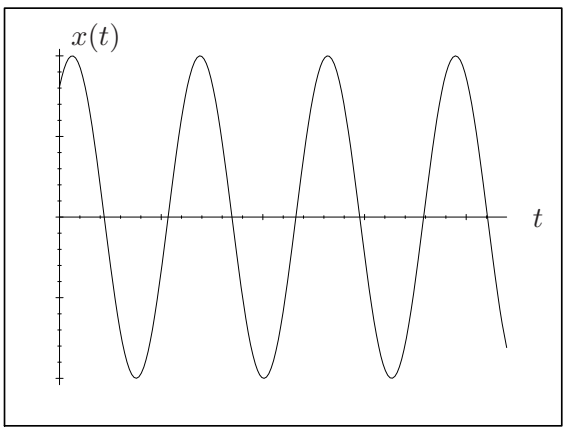
während die Phase lautet

$$\theta = \arctan\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\,. \tag{4.21}$$

Setzen wir (4.20) und (4.21) in (4.18) ein, so führt dies auf

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}\cos\left(\omega_0 t - \arctan\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right)\,, \tag{4.22}$$

was sich durch folgenden Graphen illustrieren läßt:



4.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

Wir berücksichtigen nun zusätzlich noch die Reibung am umgebenden Medium, z.B. den Luftwiderstand, und machen für die Reibungskraft den Stokesschen Ansatz

$$F_R = -\gamma \dot{x} \tag{4.23}$$

mit der Reibungskonstanten γ. Die beiden Kräfte (4.1) und (4.23) führen in der Newtonschen Bewegungsgleichung (3.1) wieder zu einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,, \tag{4.24}$$

wobei zur Abkürzung

$$\kappa = \frac{\gamma}{2m} \tag{4.25}$$

eingeführt wurde. Der Exponentialansatz (4.6) führt dann in (4.24) zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{4.26}$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_\pm = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\,. \tag{4.27}$$

Demnach lauten die beiden Fundamentallösungen der Differentialgleichung in (4.24)

$$x_1(t) = e^{-\kappa t} e^{\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}t}, \qquad x_2(t) = e^{-\kappa t} e^{-\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}t} \tag{4.28}$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich durch Linearkombination

$$x(t) = a_1 e^{-\kappa t} e^{\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}t} + a_2 e^{-\kappa t} e^{-\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}t}\,. \tag{4.29}$$

Abhängig vom Wert des Radikanten $\kappa^2 - \omega_0^2$ ergeben sich drei verschiedene Fälle für die gedämpfte harmonische Schwingung.

4.2.1 Schwache Dämpfung

Im Falle der schwachen Dämpfung gilt

$$\kappa < \omega_0\,, \tag{4.30}$$

so daß (4.29) übergeht in

$$x(t) = a_1 e^{-\kappa t} e^{i\omega t} + a_2 e^{-\kappa t} e^{-i\omega t}\,, \tag{4.31}$$

wobei die Frequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \tag{4.32}$$

wegen der Reibung kleiner ist als die Eigenfrequenz (4.5) des harmonischen Oszillators. Dabei geht die gedämpfte Schwingung (4.31), (4.32) bei einer verschwindenden Dämpfung $\kappa = 0$ in die ungedämpfte Schwingung (4.10) über. Mit der Eulerschen Formel (4.11) und den neuen Koeffizienten (4.13) erhalten wir aus (4.31)

$$x(t) = (b_1 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t) e^{-\kappa t}\,, \tag{4.33}$$

so daß die reellen Fundamentallösungen gegeben sind durch

$$x_1(t) = e^{-\kappa t}\cos\omega t, \qquad x_2(t) = e^{-\kappa t}\sin\omega t\,. \tag{4.34}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen (4.15) lassen sich wieder b_1 und b_2 in (4.33) festlegen:

$$b_1 = x_0, \qquad b_2 = \frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega}\,. \tag{4.35}$$

Außerdem läßt sich (4.33) auf die Form

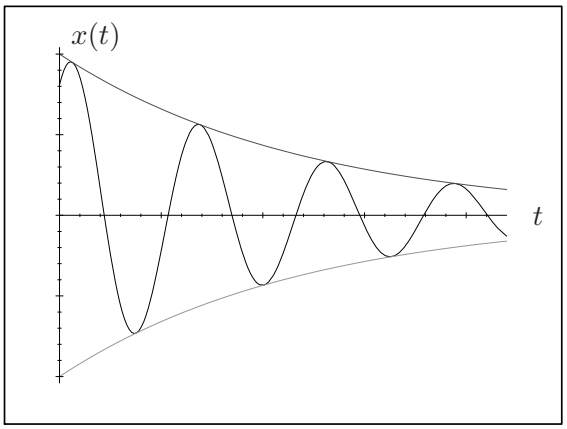
$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta)e^{-\kappa t} \tag{4.36}$$

bringen, wobei diesmal Amplitude A und Phase θ gegeben sind durch

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega}\right)^2} \tag{4.37}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega x_0}\right). \tag{4.38}$$

Die Kurve der gedämpften harmonischen Schwingung befindet sich demnach innerhalb einer exponentiellen Einhüllenden:



Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Maximalausschläge $x(t_n)$ und $x(t_{n+1})$ zu den Zeiten t_n und $t_{n+1} = t_n + T$ mit der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{4.39}$$

Für das Verhältnis der Maximalausschläge erhalten wir

$$\frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = \frac{A\cos(\omega t_n - \theta)e^{-\kappa t_n}}{A\cos(\omega t_{n+1} - \theta)e^{-\kappa t_{n+1}}} = \exp\left\{\frac{2\pi\kappa}{\omega}\right\}, \tag{4.40}$$

so daß das logarithmische Dekrement

$$\ln\frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = \frac{2\pi\kappa}{\omega} \tag{4.41}$$

unter Beachtung von (4.32) zur experimentellen Bestimmung der Abklingkonstanten κ bzw. der Dämpfungskonstanten γ nach (4.25) benutzt werden kann.

4.2.2 Aperiodischer Grenzfall

Beim aperiodischen Grenzfall

$$\kappa = \omega_0 \tag{4.42}$$

fallen die beiden Fundamentallösungen (4.28) zusammen:

$$x_1(t) = e^{-\kappa t}. \tag{4.43}$$

Da die Differentialgleichung (4.24) auch im aperiodischen Grenzfall (4.42) von zweiter Ordnung ist, d.h.

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa\dot{x}(t) + \kappa^2 x(t) = 0\,, \tag{4.44}$$

muß es neben (4.43) noch eine zweite Fundamentallösung geben. Wir finden diese nach dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren durch den Ansatz

$$x_2(t) = c(t)e^{-\kappa t}\,. \tag{4.45}$$

Die noch unbekannte Funktion $c(t)$ legen wir durch die Bedingung fest, daß (4.45) die Differentialgleichung (4.44) lösen soll. Einsetzen von (4.45) in (4.44) führt zu

$$\ddot{c}(t)e^{-\kappa t} - 2\kappa\dot{c}(t)e^{-\kappa t} + \kappa^2 c(t)e^{-\kappa t} + 2\kappa,\left\{\dot{c}(t)e^{-\kappa t} - \kappa c(t)e^{-\kappa t}\right\} + \kappa^2 c(t)e^{-\kappa t} \;=\; 0 \tag{4.46}$$

so daß $c(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{c}(t) \;=\; 0 \tag{4.47}$$

genügt mit der allgemeinen Lösung

$$c(t) \;=\; b_1 + b_2 t\,. \tag{4.48}$$

Demnach lautet die zweite Fundamentallösung

$$x_2(t) = te^{-\kappa t}\,, \tag{4.49}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.44) ergibt sich zu

$$x(t) = (b_1 + b_2 t)e^{-\kappa t}\,. \tag{4.50}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen (4.15) lassen sich b_1 und b_2 festlegen:

$$b_1 = x_0\,, \quad b_2 = \dot{x}_0 + \kappa x_0\,. \tag{4.51}$$

4.2.3 Starke Dämpfung

Im Falle der starken Dämpfung gilt

$$\kappa > \omega_0\,, \tag{4.52}$$

so daß beide Lösungen (4.27) der charakteristischen Gleichung (4.26) reell sind. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.24) ist dann durch (4.29) gegeben. Das Einarbeiten der Anfangsbedingungen (4.15) führt auf die beiden Bedingungen

$$x(0) \;=\; a_1 + a_2 \;=\; x_0\,, \tag{4.53}$$

$$\dot{x}(0) \;=\; \left(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\right) a_1 + \left(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\right) a_2 \;=\; \dot{x}_0\,. \tag{4.54}$$

In Matrixschreibweise lautet dieses inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

Verwendet man die allgemeine Form für das Inverse einer 2x2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

so läßt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem (4.55) unmittelbar lösen

$$\frac{1}{-2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} \begin{pmatrix} -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & -1 \\ \kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

so daß wir das Ergebnis

$$a_1 = \frac{(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2})x_0 + \dot{x}_0}{2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}}, \qquad a_2 = \frac{(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2})x_0 - \dot{x}_0}{2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}}\,. \tag{4.58}$$

erhalten. Im Falle der starken Dämpfung kehrt die Masse im Vergleich zum aperiodischen Grenzfall viel langsamer zur Ruhelage zurück. Man spricht deshalb von einer Kriechbewegung.

4.3 Beliebige zeitabhängige Kraft

Wir wollen nun annehmen, daß auf den Massenpunkt außer der Hookeschen Rückstallkraft (4.1) und der Stokeschen Reibungskraft (4.23) noch zusätzlich eine beliebige zeitabhängige Kraft $F(t)$ einwirkt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.1) führt dann zu einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{4.59}$$

Die allgemeine Lösung von (4.59) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung (4.24) und irgendeiner partikulären Lösung $x_p(t)$ von (4.59)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\,. \tag{4.60}$$

Eine partikuläre Lösung von (4.59) läßt sich mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten ableiten. Hierzu nimmt man an, daß die beiden Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Gleichung (4.24) bekannt sind und setzt die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.59) an als

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)\,. \tag{4.61}$$

Man versucht dann, die noch unbekannten Funktionen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ so zu bestimmen, daß (4.61) die inhomogene Gleichung (4.59) löst. Wir betrachten zunächst die erste Ableitung von (4.61):

$$\dot{x}_p(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t)\,. \tag{4.62}$$

Da wir nicht an der allgemeinsten partikulären Lösung sondern nur an einer einzigen partikulären Lösung interessiert sind, vereinfachen wir (4.62) durch die Bedingung:

$$x_1(t)\dot{c}_1(t) + x_2(t)\dot{c}_2(t) = 0\,. \tag{4.63}$$

Da sich (4.62) durch (4.63) reduziert auf

$$\dot{x}_p(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t)\,, \tag{4.64}$$

lautet die zweite Ableitung

$$\ddot{x}_p(t) = c_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t)\,. \tag{4.65}$$

Einsetzen von (4.61), (4.64) und (4.65) in die inhomogene Gleichung (4.59) führt auf

$$\begin{aligned} &c_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &+ 2\kappa\left\{c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t)\right\} + \omega_0^2\left\{x_1(t)c_1(t) + x_2(t)c_2(t)\right\} \quad = \quad \frac{F(t)}{m}\,. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Da $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Fundamentallösungen der homogenen Differentialgleichung (4.24) darstellen, d.h. es gilt

$$\ddot{x}_1(t) + 2\kappa\dot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = 0\,, \quad \ddot{x}_2(t) + 2\kappa\dot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = 0\,, \tag{4.67}$$

reduziert sich (4.66) auf

$$\dot{x}_1(t)\dot{c}_1(t) + \dot{x}_2(t)\dot{c}_2(t) = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{4.68}$$

Damit stellen (4.63) und (4.68) zwei algebraische Gleichungen für $\dot{c}_1(t)$ und $\dot{c}_2(t)$ dar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t)/m \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

Verwendet man (4.56), so läßt sich dieses inhomogene lineare Gleichungssystem nach $\dot{c}_1(t)$ und $\dot{c}_2(t)$ auflösen:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) & -x_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F(t)/m \end{pmatrix}. \tag{4.70}$$

Hierbei bezeichnet $W(t)$ die Wronski-Determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)\,. \tag{4.71}$$

Die zeitliche Ableitung von (4.71) führt auf

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= x_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)x_2(t) \\ &\overset{(4.67)}{=} -2\kappa\{x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t)\} \\ &\overset{(4.71)}{=} -2\kappa W(t)\,. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Die Integration der Diffentialgleichung (4.72) ergibt

$$W(t) = W(0)e^{-2\kappa t}\,, \tag{4.73}$$

wobei die Anfangsbedingung gegeben ist durch

$$W(0) = x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)\,. \tag{4.74}$$

Aus (4.70) lassen sich $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$ und nach einer einfachen Integration ebenso $c_1(t)$, $c_2(t)$ ablesen:

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{x_2(t)}{W(t)}\frac{F(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \frac{x_2(t')F(t')}{mW(t')}\,, \tag{4.75}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{x_1(t)}{W(t)}\frac{F(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{x_1(t')F(t')}{mW(t')}\,. \tag{4.76}$$

Setzt man (4.75) und (4.76) in (4.61) ein, so ist die partikuläre Lösung von der Form

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_c(t,t')F(t')dt'\,, \tag{4.77}$$

wobei der als Greensche Funktion benannte Integralkern $G_c(t,t')$ gegeben ist durch

$$G_c(t,t') = \begin{cases} \dfrac{x_2(t)x_1(t') - x_1(t)x_2(t')}{mW(t')} & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}. \tag{4.78}$$

Da der Integralkern $G_c(t,t')$ für $t \leq t'$ verschwindet, ist die Kausalität gewährleistet, daß eine Kraft $F(t')$ in der Zukunft keine Auswirkung auf die momentane Auslenkung $x_p(t)$ haben kann.

Diese Kausalitätseigenschaft des Integralkerns wird durch den Index c in der Notation von $G_c(t,t')$ zum Ausdruck gebracht.

Wir geben nun die Greensche Funktion im Falle der schwachen Dämpfung (4.30) explizit an und verwenden hierzu die beiden Fundamentallösungen (4.34)

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1(t) &=& e^{-\kappa t}\cos\omega t, & & \dot{x}_1(t) &=& e^{-\kappa t}\left(-\kappa\cos\omega t - \omega\sin\omega t\right) \\ x_2(t) &=& e^{-\kappa t}\sin\omega t, & & \dot{x}_2(t) &=& e^{-\kappa t}\left(-\kappa\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right)\,. \end{array} \tag{4.79}$$

Da diese Fundamentallösungen die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = -\kappa, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = \omega \tag{4.80}$$

besitzen, lautet die Wronski-Determinante nach (4.73) und (4.74)

$$W(t) = \omega e^{-2\kappa t}\,. \tag{4.81}$$

Tatsächlich erhalten wir nach (4.71) und (4.79)

$$W(t) = e^{-2\kappa t}\left\{\cos\omega t\left(-\kappa\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right) - \sin\omega t\left(-\kappa\cos\omega t - \omega\sin\omega t\right)\right\} = \omega e^{-2\kappa t}\,. \tag{4.82}$$

Einsetzen von (4.79) und (4.81) in (4.78) führt schließlich auf die explizite Gestalt der kausalen Greenschen Funktion bei schwacher Dämpfung:

$$G_c(t,t') = \begin{cases} \dfrac{1}{m\omega}e^{-\kappa(t-t')}\sin\omega(t-t') & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}\,. \tag{4.83}$$

Demnach ist die Greensche Funktion $G_c(t,t')$ nur von der Zeitdifferenz $t-t'$ abhängig:

$$G_c(t,t') = G_c(t-t')\,. \tag{4.84}$$

Dies liegt daran, daß die homogene Differentialgleichung (4.24) nicht explizit von der Zeit abhängt und daher unter Zeittranslationen invariant ist. In der 8. Übungsaufgabe führen wir in (4.83) den Grenzübergang $\omega_0 \to 0$ durch, um die kausale Greensche Funktion des gedämpften freien Teilchens zu bestimmen.

Die Greensche Funktion im aperiodischen Grenzfall (4.42) läßt sich auf zweierlei Wegen bestimmen. Setzen wir (4.83) im Limes $\kappa \uparrow \omega_0$ analytisch fort, so folgt mit Hilfe von (4.32) und der Regel von de l' Hôpital

$$\lim_{\kappa\uparrow\omega_0}\frac{\sin\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}(t-t')}{\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}} = t-t' \tag{4.85}$$

die Greensche Funktion im aperiodischen Grenzfall:

$$G_c(t,t') = \begin{cases} \dfrac{t-t'}{m}e^{-\kappa(t-t')} & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}\,. \tag{4.86}$$

Das selbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die beiden Fundamentallösungen (4.43) und (4.49) in (4.78) einsetzen. Dabei lautet die Wroski-Determinante (4.71) der beiden Fundamentallösungen (4.43) und (4.49):

$$W(t) = e^{-2\kappa t}\,. \tag{4.87}$$

Ganz entsprechend gehen wir im Falle der starken Dämpfung (4.52) vor. Eine analytische Fortsetzung der Greenschen Funktion (4.83) der schwachen Dämpfung (4.30) für die starke Dämpfung (4.52) ergibt unter Beachtung von (4.32):

$$G_c(t,t') = \begin{cases} \dfrac{1}{m\sqrt{\kappa^2-\omega^2}} e^{-\kappa(t-t')} \sin\sqrt{\kappa^2-\omega^2}(t-t') & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases} . \tag{4.88}$$

Hierbei haben wir die analytische Fortsetzung der sin-Funktion verwendet, d.h.

$$\sin ix = i \sinh x \,, \tag{4.89}$$

die sich mit Hilfe der Eulerschen Formel (4.11) beweisen läßt. Das selbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die beiden Fundamentallösungen (4.28) in (4.78) einsetzen. Dabei lautet die Wronski-Determinante der Fundamentallösungen (4.28):

$$W(t) = -2\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}\, e^{-2\kappa t} \,. \tag{4.90}$$

4.4 Erzwungene Schwingungen

Wir berechnen nun die partikuläre Lösung für eine harmonische äußere Kraft

$$F(t) = F_0 \cos\Omega t \,. \tag{4.91}$$

Einsetzen von (4.83) und (4.91) in (4.77) zeigt, daß hierzu zwei einzelne Integrale auszuwerten sind:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega} e^{-\kappa t} \left\{ \sin\omega t \int\limits_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \cos\omega t' \cos\Omega t' - \cos\omega t \int\limits_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \sin\omega t' \cos\Omega t' \right\} . \tag{4.92}$$

Aufgrund der trigonometrischen Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \,, \tag{4.93}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{4.94}$$

lassen sich Produkte trigonometrischer Funktionen zerlegen gemäß

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right\} , \tag{4.95}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right\} , \tag{4.96}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right\} . \tag{4.97}$$

Mit Hilfe von (4.95) und (4.97) vereinfacht sich (4.92):

$$\begin{aligned} x_p(t) = \frac{F_0}{2mw} e^{-\kappa t} \Bigg\{ & \sin\omega t \left[\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \cos(\omega-\Omega)t' + \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \cos(\omega+\Omega)t' \right] \\ & - \cos\omega t \left[\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \sin(\omega-\Omega)t' + \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \sin(\omega+\Omega)t' \right] \Bigg\} . \end{aligned} \tag{4.98}$$

Die verbleibenden Integrale lassen sich durch partielle Integration berechnen:

$$\int dx\, e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx), \tag{4.99}$$

$$\int dx\, e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) \,. \tag{4.100}$$

Einsetzen von (4.99) und (4.100) in (4.98) führt zunächst auf

$$\begin{aligned} x_p(t) \;=\; & \frac{F_0}{2m\omega} e^{-\kappa t} \Bigg\{ \sin\omega t \left[\frac{e^{\kappa t}}{\kappa^2+(\omega-\Omega)^2} (\kappa\cos(\omega-\Omega)t + (\omega-\Omega)\sin(\omega-\Omega)t) \right. \\ & \left. + \frac{e^{\kappa t}}{\kappa^2+(\omega+\Omega)^2} (\kappa\cos(\omega+\Omega)t) + (\omega+\Omega)\sin(\omega+\Omega)t) \right] \\ & - \cos\omega t \left[\frac{e^{\kappa t}}{\kappa^2+(\omega-\Omega)^2} (\kappa\sin(\omega-\Omega)t - (\omega-\Omega)\cos(\omega-\Omega)t) \right. \\ & \left. + \frac{e^{\kappa t}}{\kappa^2+(\omega+\Omega)^2} (\kappa\sin(\omega+\Omega)t - (\omega+\Omega)\cos(\omega+\Omega)t) \right] \Bigg\} \,. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Die einzelnen Beiträge lassen sich mit Hilfe von (4.95)–(4.97) zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} x_p(t) \;=\; & \frac{F_0}{4m\omega} \Bigg\{ \frac{1}{\kappa^2+(\omega-\Omega)^2} [\kappa\,(\sin\Omega t + \sin(2\omega-\Omega t)t) + (\omega-\Omega)(\cos\Omega t - \cos(2\omega-\Omega)t) \\ & - \kappa\,(-\sin\Omega t + \sin(2\omega-\Omega)t) + (\omega-\Omega)\,(\cos\Omega t + \cos(2\omega-\Omega)t)] \\ & + \frac{1}{\kappa^2+(\omega+\Omega)^2} [\kappa\,(-\sin\Omega t + \sin(2\omega+\Omega)t) + (\omega+\Omega)(\cos\Omega t - \cos(2\omega+\Omega)t) \\ & - \kappa\,(\sin\Omega t + \sin(2\omega+\Omega)t) + (\omega+\Omega)\,(\cos\Omega t + \cos(2\omega+\Omega)t)] \Bigg\} \,, \end{aligned} \tag{4.102}$$

was sich weiter vereinfachen läßt:

$$x_p(t) \;=\; \frac{F_0}{2m\omega} \left\{ \frac{\kappa\sin\Omega t + (\omega-\Omega)\cos\Omega t}{\kappa^2+(\omega-\Omega)^2} + \frac{-\kappa\sin\Omega t + (\omega+\Omega)\cos\Omega t}{\kappa^2+(\omega+\Omega)^2} \right\} . \tag{4.103}$$

Bringt man beide Summanden auf den Hauptnenner

$$\begin{aligned} x_p(t) \;=\; & \frac{F_0}{2m\omega} \frac{1}{(\kappa^2+(\omega-\Omega)^2)\,(\kappa^2+(\omega+\Omega)^2)} \left\{ \kappa\sin\Omega t \left[\kappa^2 + (\omega+\Omega)^2 - \kappa^2 - (\omega-\Omega)^2 \right] \right. \\ & \left. + \cos\Omega t \left[(\omega-\Omega)\left(\kappa^2+(\omega+\Omega)^2\right) + (\omega+\Omega)\left(\kappa^2+(\omega-\Omega)^2\right) \right] \right\} \,, \end{aligned} \tag{4.104}$$

erhält man schließlich

$$x_p(t) \;=\; \frac{F_0}{m} \frac{2\Omega\kappa\sin\Omega t + (\kappa^2+\omega^2-\Omega^2)\cos\Omega t}{(\kappa^2+(\omega-\Omega)^2)\,(\kappa^2+(\omega+\Omega)^2)} \,. \tag{4.105}$$

Beachtet man die Frequenz (4.32) bei schwacher Dämpfung, so geht (4.105) über in

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m} \frac{2\Omega\kappa\sin\Omega t + (\omega_0^2-\Omega^2)\cos\Omega t}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + 4\kappa^2\Omega^2} \,. \tag{4.106}$$

Demnach schwingt die partikuläre Lösung $x_p(t)$ mit derselben Frequenz Ω wie die äußere Kraft (4.91). Die partikuläre Lösung (4.106) ist von der Form

$$x_p(t) \;=\; A\cos(\Omega t-\varphi) = A\cos\varphi\cos\Omega t + A\sin\varphi\sin\Omega t \,, \tag{4.107}$$

wobei der Koeffizientenvergleich auf

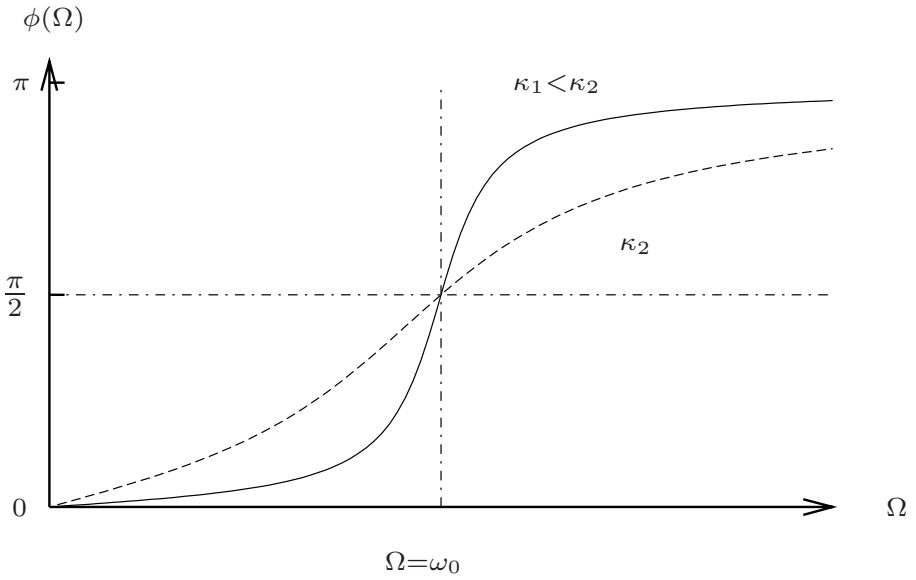
$$A\cos\varphi \;=\; \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\kappa^2\Omega^2} , \tag{4.108}$$

$$A\sin\varphi \;=\; \frac{F_0}{m} \frac{2\Omega\kappa}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\kappa^2\Omega^2} \tag{4.109}$$

führt. Die Phasenverschiebung φ zwischen der äußeren Kraft $F(t)$ und der partikulären Lösung $x_p(t)$ ist gegeben durch

$$\varphi = \arctan\frac{2\Omega\kappa}{\omega_0^2-\Omega^2} \,. \tag{4.110}$$

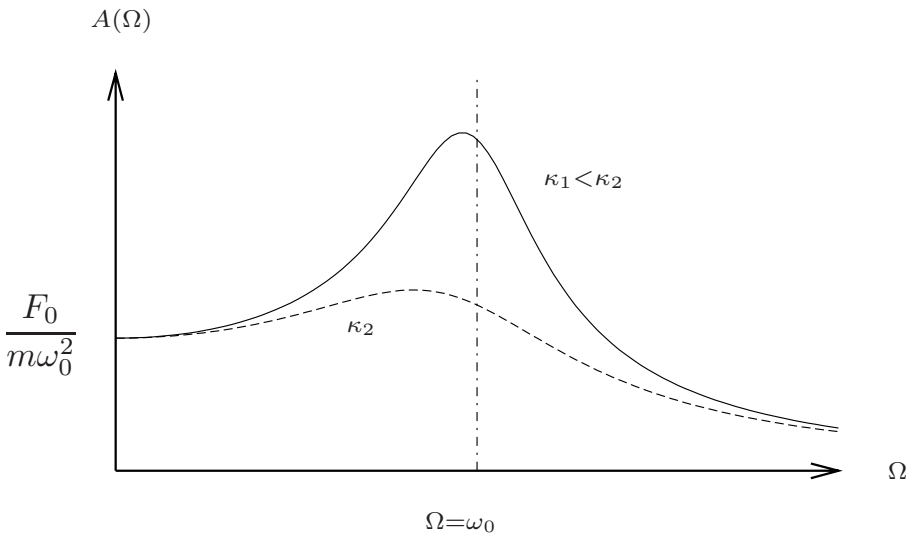
Die graphische Darstellung der Phasenverschiebung φ als Funktion der äußeren Frequenz Ω ergibt:



Die Phasenverschiebung $\varphi(\Omega)$ ist für $\Omega = \omega_0$ gleich $\pi/2$ unabhängig von der Dämpfung κ. Ferner ergibt sich die Amplitude A zu

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}}\,, \tag{4.111}$$

was auf die folgende Resonanzkurve führt:



Wir untersuchen nun, bei welcher Frequenz Ω_0 die Amplitude $A(\Omega)$ extremal ist:

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{F_0}{m} \frac{2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 4\kappa^2 2\Omega}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{-1}{2} \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{4.112}$$

Als Lösung erhalten wir

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2} \stackrel{(4.32)}{<} \omega < \omega_0\,. \tag{4.113}$$

Bei dieser Frequenz Ω_0 nimmt die Amplitude $A(\Omega)$ den Wert

$$A(\Omega_0) \quad = \quad \frac{F_0}{2m\kappa\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} \tag{4.114}$$

an, der im Limes $\kappa \to 0$ divergiert.

4.5 Diracsche Deltafunktion

Wir wollen nun wieder zur inhomogenen Differentialgleichung (4.59) zurückkehren und deren Lösung $x(t)$ für den Fall bestimmen, daß die Kraft $F(t)$ einen kurzzeitigen Kraftstoß ("Kick") darstellt. Hierzu müssen wir uns allerdings zunächst damit beschäftigen, wie man einen solchen kurzzeitigen Kraftstoß mathematisch beschreibt. Er wurde erstmalig von Dirac in Form der sogenannten Deltafunktion $\delta(t)$ eingeführt, die durch zwei Eigenschaften charaterisiert ist:

(D1) $\delta(t) = 0\,, \quad t \neq 0 \quad ,$

(D2) $\int\limits_{-\mu}^{+\mu} \delta(t)dt = 1\,, \quad \mu > 0.$

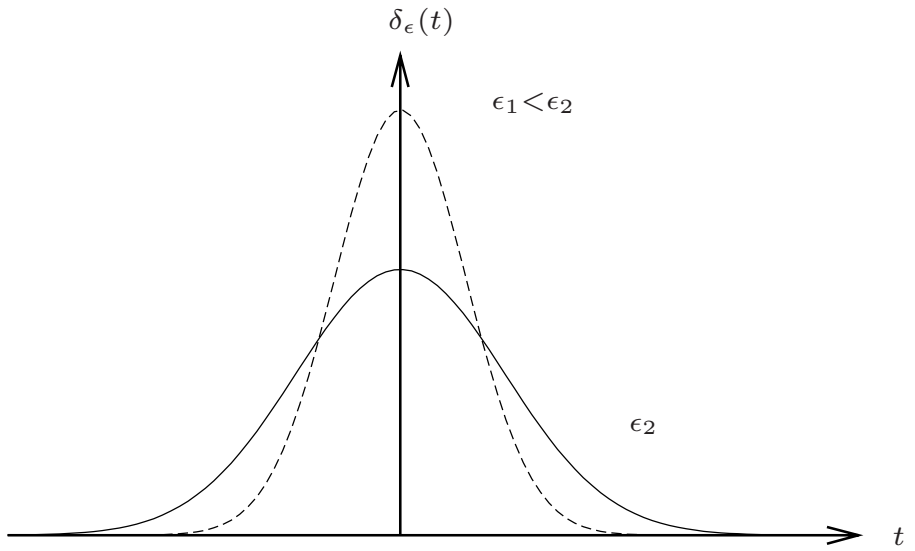
Man erhält die Diracsche Deltafunkton $\delta(t)$ im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$ aus einer Funktionenfolge $\delta_\epsilon(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_\epsilon(t)\,. \tag{4.115}$$

Betrachten wir beispielsweise die Folge der Gauß-Funktionen

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right\} \tag{4.116}$$

im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$:



Die erste Eigenschaft (D1) ergibt sich daraus, daß $\delta_\epsilon(t)$ für ein festes t im Limes $\epsilon \downarrow 0$ exponentiell gegen 0 konvergiert und die zweite Eigenschaft (D2) ist garantiert, da die Gauß-Funktionen (4.116) schon für jedes ϵ normiert sind:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt \equiv 1\,. \tag{4.117}$$

Hierbei folgt (4.117) aus dem Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,, \tag{4.118}$$

dessen Quadrat sich durch den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten berechnen läßt:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\left(x^2+y^2\right)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r e^{-r^2} = \pi\,. \tag{4.119}$$

In der 8. Übungsaufgabe werden andere Funktionenfolgen $\delta_\epsilon(t)$ untersucht, die im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$ die Diracsche Deltafunktion $\delta(t)$ darstellen.

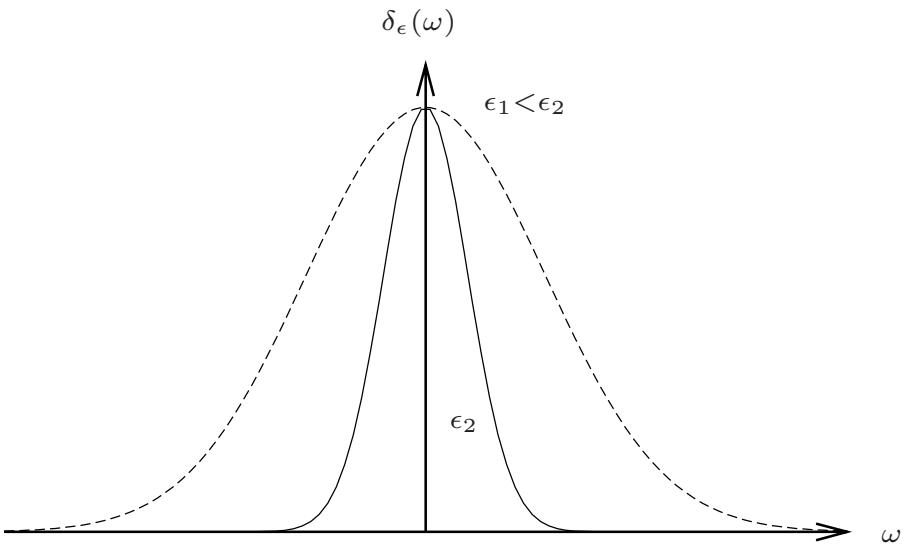
Wir berechnen nun die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktionen (4.116)

$$\delta_\epsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \delta_\epsilon(t) dt\,. \tag{4.120}$$

Einsetzen von (4.116) in (4.120) und eine quadratische Ergänzung führen auf

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\epsilon^2} \left(t^2 + 2i\epsilon^2\omega t - \omega^2\epsilon^4 + \omega^2\epsilon^4 \right) \right\} dt \\ &\overset{(4.118)}{=} \exp\left\{ -\frac{\epsilon^2}{2}\omega^2 \right\}\,. \end{aligned} \tag{4.121}$$

Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktionen sind demnach wieder Gauß-Funktionen:



Wir bemerken, daß die Breite der Gauß-Funktionen (4.116) im Zeitbereich

$$\Delta_t = \epsilon \tag{4.122}$$

und die Breite der Gauß-Funktionen (4.116) im Frequenzbereich

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\epsilon} \tag{4.123}$$

durch eine "Unschärferelation" miteinander verbunden sind:

$$\Delta_t \Delta_\omega = 1\,. \tag{4.124}$$

Im Limes $\epsilon \downarrow 0$ geht die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion (4.120) wegen (4.115) in die Fourier-Transformierte der Diracschen Deltafunktion

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\delta(t)dt \tag{4.125}$$

über gemäß

$$\delta(\omega) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \delta_\epsilon(\omega)\,. \tag{4.126}$$

Aus (4.121) und (4.126) lesen wir ab:

$$\delta(\omega) \equiv 1\,. \tag{4.127}$$

Wir zeigen nun, daß die Invertierung der Fourier-Transformation (4.120) gegeben ist durch

$$\delta_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\delta_\epsilon(\omega)\,. \tag{4.128}$$

Einsetzen von (4.121) in (4.128) führt tatsächlich auf

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2}\omega^2\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2}\left(\omega^2 - \frac{2it}{\epsilon^2}\omega - \frac{t^2}{\epsilon^4} + \frac{t^2}{\epsilon^4}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right\} \\
&\overset{(4.116)}{=} \delta_\epsilon(t)\,.
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Im Limes $\epsilon \downarrow 0$ folgt aus (4.115) und (4.126)–(4.128) die Fourier-Darstellung der Deltafunktion:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\,. \tag{4.130}$$

Wir betrachten nun eine beliebige Funktion $f(t)$ und deren Fourier-Zerlegung

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} f(\omega)\,. \tag{4.131}$$

Wir berechnen die Faltung dieser Funktion $f(t)$ mit der Diracschen Deltafunktion $\delta(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)\delta(t-t_0) &\overset{(4.131)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\delta(t-t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} f(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dt\delta(t-t_0) e^{i\omega t} \\
&\overset{t'(t)=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\delta(t') e^{i\omega(t'+t_0)} \\
&\overset{(4.125),(4.127)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) e^{i\omega t_0} \\
&\overset{(4.131)}{=} f(t_0)\,. \qquad (4.132)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser fundamentalen Eigenschaft der Diracschen Deltafunktion läßt sich die Fourier-Transformierte (4.131) invertieren:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i\omega' t} f(\omega') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} f(\omega') \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega'-\omega)t} \\
&\overset{(4.130)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} f(\omega') 2\pi\delta(\omega'-\omega) \\
&\overset{(4.132)}{=} f(\omega)\,. \qquad (4.133)
\end{aligned}$$

4.6 Greensche Funktion

Wir bestimmen nun die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.59) auf einem anderen Weg als in Abschnitt 4.3, indem wir (4.77) als Lösungsansatz verwenden. Er besagt, daß zwischen der Kraft $F(t)$ als Ursache und der Auslenkung $x_p(t)$ als Wirkung ein linearer Zusammenhang besteht, der durch die kausale Greensche Funktion

$$G_c(t,t') \begin{cases} \neq 0 & ; \quad t \geq t' \\ = 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases} \qquad (4.134)$$

festgelegt wird. Setzen wir (4.77) und die aus (4.132) folgende Identität

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\delta(t-t')F(t') \qquad (4.135)$$

in die inhomogene Differentialgleichung (4.59) ein, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left\{ \frac{\partial^2 G_c(t,t')}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} + \omega_0^2 G_c(t,t') \right\} F(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{F(t')}{m} \delta(t-t')\,. \qquad (4.136)$$

Da (4.136) für jede Kraft $F(t)$ gelten soll, genügt die Greensche Funktion $G_c(t,t')$ der Differentialgleichung (4.59) mit der Deltafunktion $\delta(t)$ als Inhomogenität:

$$\frac{\partial^2 G_c(t,t')}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} + \omega_0^2 G_c(t,t') = \frac{1}{m}\delta(t-t')\,. \tag{4.137}$$

Zur Lösung von (4.137) stellen wir zunächst fest, daß $G_c(t,t')$ für $t \neq t'$ die homogene Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 G_c(t,t')}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} + \omega_0^2 G_c(t,t') = 0\,, \quad t \neq t'\,. \tag{4.138}$$

Unter Berücksichtigung der Kausalität (4.134) stellt $G_c(t,t')$ für $t \geq t'$ eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Differentialgleichung dar:

$$G_c(t,t') = \begin{cases} c_1(t')x_1(t) + c_2(t')x_2(t) & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}\,. \tag{4.139}$$

Die beiden Entwicklungskoeffizienten $c_1(t')$ und $c_2(t')$ werden durch das Verhalten der Greenschen Funktion $G_c(t,t')$ an der Stelle $t = t'$ bestimmt. Hierzu fordert man einerseits, daß $G_c(t,t')$ bei $t = t'$ stetig ist:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[G_c(t,t') \mid_{t=t'+\epsilon} - G_c(t,t')|_{t=t'-\epsilon} \right] = 0\,. \tag{4.140}$$

Einsetzen von (4.139) in (4.140) führt auf die erste Bedingung

$$c_1(t')x_1(t') + c_2(t')x_2(t') = 0\,. \tag{4.141}$$

Andererseits läßt man zu, daß die zeitliche Ableitung $\partial G_c(t,t')/\partial t$ an der Stelle $t = t'$ einen Sprung aufweist. Die Größe dieses Sprunges berechnet man indem man (4.137) bezüglich t von $t = t' - \epsilon$ bis $t = t' + \epsilon$ integriert und den Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \frac{\partial^2 G_c(t,t')}{\partial t^2} + 2\kappa \underbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t}}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt\, G_c(t,t')}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0} &= \underbrace{\frac{1}{m} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t-t')}_{=1 \text{ nach (D2)}} \\ \Rightarrow \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\left. \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} \right|_{t=t'+\epsilon} - \left. \frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} \right|_{t=t'-\epsilon} \right] &= \frac{1}{m}\,. \end{aligned} \tag{4.142}$$

Die Ableitung von (4.139) bezüglich t führt auf

$$\frac{\partial G_c(t,t')}{\partial t} = \begin{cases} c_1(t')\dot{x}_1(t) + c_2(t')\dot{x}_2(t) & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}\,, \tag{4.143}$$

so daß man aus (4.142) die zweite Bedingung

$$c_1(t')\dot{x}_1(t') + c_2(t')\dot{x}_2(t') = \frac{1}{m} \tag{4.144}$$

erhält. Die beiden algebraischen Gleichungen (4.141) und (4.144) stellen ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_1(t')$ und $c_2(t')$ dar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t') & x_2(t') \\ \dot{x}_1(t') & \dot{x}_2(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t') \\ c_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \tag{4.145}$$

Mit Hilfe von (4.56) läßt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem unmittelbar lösen

$$\begin{pmatrix} c_1(t') \\ c_2(t') \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t')} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t') & -x_2(t') \\ -\dot{x}_1(t') & x_1(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}\,, \tag{4.146}$$

so daß wir das Ergebnis

$$c_1(t') = -\frac{x_2(t')}{mW(t')}, \quad c_2(t') = \frac{x_1(t')}{mW(t')} \tag{4.147}$$

erhalten. Einsetzen von (4.147) in (4.139) führt schließlich auf das in (4.78) abgeleitete Ergebnis für die Greensche Funktion.

Kapitel 5

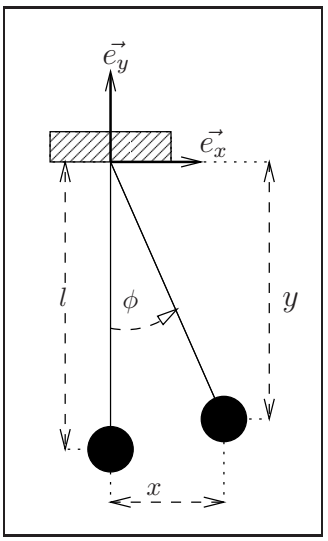
Mathematisches Pendel

Der harmonische Oszillator stellt ein schwingendes mechanisches System dar, bei dem die Frequenz der Schwingungen nicht von den Anfangsbedingungen abhängt. Dasselbe gilt auch für den harmonischen Oszillator mit Zentrifugalbarriere, den wir in der 6. Übungsaufgabe untersuchten. Es gibt aber auch schwingende mechanische Systeme, bei denen die Frequenz der Schwingungen von den Anfangsbedingungen wie z.B. der Anfangsauslenkung abhängt. Hierzu zählt der anharmonische Duffing-Oszillator in der 9. Übungsaufgabe und das mathematische Pendel, das wir in diesem Kapitel näher untersuchen.

Unter einem mathematischem Pendel versteht man einen Massenpunkt m, der an einem Faden der Länge l unter dem Einfluß der Gravitationskraft in einer Ebene schwingt. Hierbei soll sowohl die Masse des Fadens als auch die Luftreibung vernachlässigt werden. Im folgenden leiten wir zunächst die Bewegungsgleichung für den Winkel $\varphi(t)$ her, um den der Massenpunkt aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt ist. Durch Integration dieser Bewegungsgleichung erhalten wir dann die Periodendauer T des mathematischen Pendels in Abhängigkeit von der Anfangsauslenkung φ_0.

5.1 Bewegungsgleichung

Zur Beschreibung des mathematischen Pendels verwenden wir das folgende Koordinatensystem:



Gemäß dieser Skizze lautet der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} l\sin\varphi(t) \\ -l\cos\varphi(t) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

wobei $\varphi(t)$ den Auslenkungswinkel bezeichnet. Zeitliche Ableitungen des Orsvektores (5.1) führen demnach auf den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} l\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \\ l\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

und auf den Beschleunigungsvektor

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} l\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) - l\dot{\varphi}(t)^2\sin\varphi(t) \\ l\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) + l\dot{\varphi}(t)^2\cos\varphi(t) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Auf den Massenpunkt wirkt zum einen die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

und zum anderen die Fadenkraft

$$\vec{F}_F = \lambda(t)\begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

wobei der Betrag $\lambda(t)$ der Fadenkraft zunächst noch unbekannt ist. Die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.1) des mathematischen Pendels lautet dann

$$m\begin{pmatrix} l\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) - l\dot{\varphi}(t)^2\sin\varphi(t) \\ l\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) + l\dot{\varphi}(t)^2\cos\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Projiziert man (5.6) auf den Einheitsvektor in Fadenrichtung

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\varphi(t) \\ -\cos\varphi(t) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

so ergibt sich der Betrag der Fadenkraft zu

$$\lambda(t) = mg\cos\varphi(t) + ml\dot{\varphi}(t)^2. \tag{5.8}$$

Der erste Term kompensiert die Projektion der Gravitationskraft (5.4) in Fadenrichtung, während der zweite Term die momentan wirkende Zentrifugalkraft darstellt. Projiziert man dagegen die Newtonsche Bewegungsgleichung (5.6) auf den tangential gerichteten Einheitsvektor

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

so erhält man eine nichtlineare Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2\sin\varphi(t) = 0 \tag{5.10}$$

mit der Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{5.11}$$

Diese Frequenz ω_0 ist um so größer, je kürzer die Fadenlänge l ist.

5.2 Periodendauer

Multipliziert man (5.10) mit $\dot{\varphi}(t)$, so führt eine erste Integration der Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = 0 \tag{5.12}$$

auf die Beziehung

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \pm\sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos\varphi(t) - \cos\varphi_0}\,. \tag{5.13}$$

Eine Separation der Variablen führt (5.13) über in

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi(t) - \cos\varphi_0}} = \pm\sqrt{2}\omega_0(t - t_0)\,. \tag{5.14}$$

Im folgenden wollen wir nicht die gesamte Zeitabängigkeit des Auslenkungswinkels $\varphi(t)$ diskutieren, die durch die implizite Gleichung (5.14) bestimmt wird. Statt dessen wollen wir die Periodendauer T der Pendelschwingung berechnen. Hierzu untersuchen wir die erste Viertelperiode der Pendelschwingung mit

$$\varphi(t) = 0, \quad t = t_0 + \frac{T}{4}\,, \tag{5.15}$$

so daß wir uns in (5.14) auf das Minuszeichen beschränken müssen. Dadurch erhalten wir für die Periodendauer T den Ausdruck

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi(t) - \cos\varphi_0}}\,. \tag{5.16}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Umformung

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,, \tag{5.17}$$

die sich unmittelbar aus dem trigonometrischen Additionstheorem (4.94) ergibt, geht (5.16) über in:

$$T = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}\,. \tag{5.18}$$

Wir führen nun die Substitution

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin x \tag{5.19}$$

durch. Das totale Differential transformiert sich dann gemäß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi &= \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos x dx \\ \Rightarrow d\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}dx &\overset{(5.19)}{=} \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 x}}dx\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

während die transformierten Integrationsgrenzen gegeben sind durch

$$x_1(\varphi_1 = 0) = 0, \quad x_2(\varphi_2 = \varphi_0) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{5.21}$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2} \tag{5.22}$$

ein, so erhalten wir schließlich aus (5.18)

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{2k\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \frac{1}{\sqrt{k^2-k^2\sin^2 x}} dx = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \,. \tag{5.23}$$

Hierbei tritt ein elliptisches Integral erster Gattung in der Legendreschen Normalform auf

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \,, \tag{5.24}$$

so daß (5.23) die Form

$$T = \frac{4}{\omega_0} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.25}$$

besitzt. Das elliptische Integral $F(k,\pi/2)$ läßt sich für kleine k, d.h. nach (5.22) für kleine Anfangsauslenkungen φ_0, störungstheoretisch berechnen. Die Taylor-Reihe

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + \ldots \tag{5.26}$$

führt nämlich zu einer Entwicklung des Integranden in (5.24):

$$\begin{aligned} F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\pi/2} dx \left\{ 1 + \frac{-1}{2}(-k^2\sin^2 x) + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}(-k^2\sin^2 x)^2 + \ldots \right\} \\ &= \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x + \frac{3}{8}k^4 \int_0^{\pi/2} dx \sin^4 x + \ldots \,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Die hierbei auftretenden Integrale sind elementar. Sie lassen sich durch die Rekursionsformel

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{1}{m}\, \sin^{m-1} x\, \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx \tag{5.28}$$

berechnen, die wir durch partielle Integration erhalten. Durch Iteration von (5.28) finden wir

$$\int_0^{\pi/2} dx \sin^{2n} x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\, \frac{\pi}{2} \,, \tag{5.29}$$

so daß wir im einzelnen erhalten:

$$\int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x = \frac{\pi}{4} \,, \quad \int_0^{\pi/2} dx \sin^4 x = \frac{3\pi}{16} \,. \tag{5.30}$$

Damit lautet die Taylor-Entwicklung des elliptischen Integrales (5.27):

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9\pi}{128}k^4 + \ldots \,. \tag{5.31}$$

Nach (5.22), (5.25) und (5.31) ergibt sich die Periodendauer des Pendels zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left\{ 1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots \right\} \,. \tag{5.32}$$

Für sehr kleine Anfangsauslenkungen φ_0 ist die Periodendauer T unabhängig von φ_0 gegeben durch

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,. \tag{5.33}$$

Für endliche Auslenkungen φ_0 wird dagegen die Periodendauer T größer als T_0. Dies ist plausibel, da bei größeren Auslenkungen die rücktreibende Kraft proportional zu $\sin\varphi$ und damit kleiner als die harmonische rücktreibende Kraft ist. Der durch (5.32) beschriebene Einfluß der Anfangsauslenkung φ_0 auf die Periodendauer des Pendels wird durch folgende Tabelle illustriert:

φ_0	1°	5°	10°	20°
$\frac{T-T_0}{T_0}$	0,0019%	0,048%	0,19%	0,77%

Bei größeren Auslenkungen von φ_0 sind natürlich auch die weiteren Terme von (5.32) von Bedeutung.

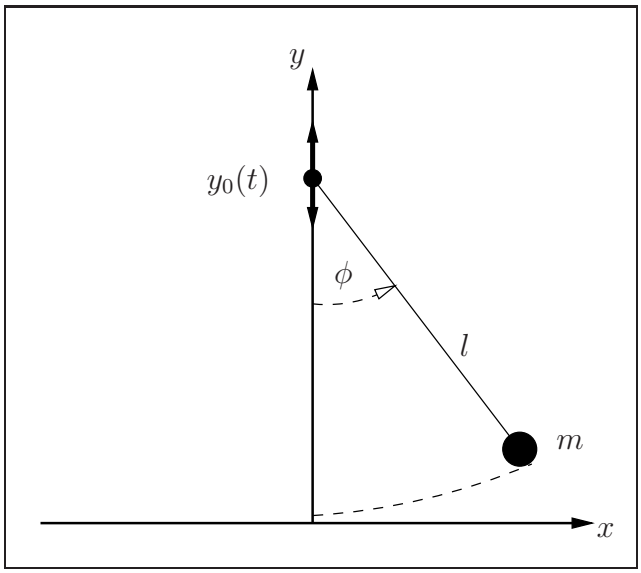
Kapitel 6

Parametrische Resonanz

Unter parametrischer Resonanz versteht man das Phänomen, daß die Bewegung eines schwingenden Systems dadurch verstärkt werden kann, daß man einen Parameter dieses Systems periodisch ändert. Beispielsweise verstärkt sich die Bewegung einer Schaukel, wenn sich der Schwerpunkt periodisch hebt und senkt (vgl. 10. Übungsaufgabe). Man spricht hierbei vom "Aufschaukeln" der Bewegung.

6.1 Mathieu-Gleichung

Wir untersuchen im folgenden das Phänomen der parametrischen Resonanz am Beispiel des mathematischen Pendels, dessen Aufhängepunkt vertikal gemäß einer vorgegebenen Funktion $y_0(t)$ bewegt werden soll:



Ruht der Aufhängepunkt des mathematischen Pendels, ist also $y_0(t) = 0$, so erhalten wir nach (5.10) und (5.11) für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \sin \varphi(t) = 0 \,. \tag{6.1}$$

Wird dagegen der Aufhängepunkt bewegt, ist also $y_0(t) \neq 0$, so befindet sich das mathematische Pendel in einem allgemeinen beschleunigten Bezugssystem, in dem zusätzlich zur Gravitationskraft $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_y$ noch die Scheinkraft $\vec{F}_S = m\ddot{y}_0(t)\vec{e}_y$ auftritt. Dies bedeutet, daß statt der

Erdbeschleunigung g die effektive Beschleunigung $g_{\text{eff}} = g - \ddot{y}_0(t)$ vorliegt. In diesem Fall geht die Bewegungsgleichung (6.1) für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ über in

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g - \ddot{y}_0(t)}{l} \sin\varphi(t) = 0\,. \tag{6.2}$$

Wird der Aufhängepunkt beispielsweise periodisch mit der Amplitude A und der Frequenz ω bewegt

$$y_0(t) = A\cos\omega t, \qquad \ddot{y}_0(t) = -A\omega^2\cos\omega t\,, \tag{6.3}$$

so lautet die Bewegungsgleichung (6.2):

$$\ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\sin\varphi(t) = 0\,. \tag{6.4}$$

Aufgrund der expliziten Zeitabhängigkeit handelt es sich hierbei nicht um ein abgeschlossenes sondern um ein offenes System. Die Gleichgewichtspunkte von (6.4) sind offensichtlich durch $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$ gegeben. Für kleine Auslenkungen aus dem unteren Gleichgewichtspunkt $\varphi_1 = 0$ läßt sich die Bewegungsgleichung (6.4) linearisieren

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\varphi(t) = 0\,. \tag{6.5}$$

Durch die Umskalierung

$$\tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \varphi\left(\frac{2}{\omega}\tilde{t}\right), \quad \tilde{t} = \frac{\omega t}{2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\omega}{2}\frac{d}{d\tilde{t}}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\omega^2}{4}\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \tag{6.6}$$

läßt sich (6.5) auf die Form der Mathieu-Gleichung

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2}\tilde{\varphi}(\tilde{t}) + \left\{c - 2q\cos 2\tilde{t}\right\}\tilde{\varphi}(\tilde{t}) = 0 \tag{6.7}$$

bringen, wobei die Parameter c und q gegeben sind durch

$$c = \frac{4g}{l\omega^2}, \qquad q = -\frac{2A}{l}\,. \tag{6.8}$$

Betrachtet man dagegen kleine Auslenkungen aus dem oberen Gleichgewichtspunkt $\varphi_2 = \pi$, so erhält man durch Linearisierung und Umskalierung wieder die Mathieu-Gleichung (6.7), wobei nun aber die Parameter lauten

$$c = -\frac{4g}{l\omega^2}, \qquad q = \frac{2A}{l}\,. \tag{6.9}$$

In beiden Fällen (6.8) und (6.9) ist c umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz ω, während q proportional zur Amplitude A ist. Diese Abhängigkeit von c und q von den Parametern der periodischen Bewegung des Aufhängepunktes wird im folgenden bei der Untersuchung des Phänomens der parametrischen Resonanz von Bedeutung sein.

6.2 Floquet-Theorie

Die Mathieu-Gleichung (6.7) ist ein Spezialfall der Hill-Gleichung

$$\ddot{x}(t) + f(t)x(t) = 0\,, \tag{6.10}$$

wobei $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periodendauer T bezeichnet:

$$f(t) = f(t+T)\,. \tag{6.11}$$

Die Hill-Gleichung (6.10) besitzt zwei wichtige Eigenschaften:

1. Mit $x(t)$ ist auch $x(t+T)$ eine Lösung von (6.10). Substituiert man nämlich in (6.10) t durch $t+T$, so folgt

$$\frac{d^2x(t+T)}{d(t+T)^2} + f(t+T)x(t+T) \overset{(6.11)}{=} \frac{d^2x(t+T)}{dt^2} + f(t)x(t+T) = 0\,. \tag{6.12}$$

2. Als gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt (6.10) zwei Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$\ddot{x}_1(t) + f(t)x_1(t) = 0\,, \quad \ddot{x}_2(t) + f(t)x_2(t) = 0\,. \tag{6.13}$$

Aus diesen beiden Eigenschaften folgern wir, daß auch $x_1(t+T)$ und $x_2(t+T)$ Lösungen der Hill-Gleichung (6.10) darstellen und sich deshalb nach den Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ entwickeln lassen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\,. \tag{6.14}$$

Die Matrix $A = (A_{ij})$ gibt dabei an, wie sich die Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nach einer Periode von $f(t)$ verändert haben. Man kann über die Matrix A zwei einschränkende Aussagen machen:

1. Zunächst stellen wir fest, daß die Wronski-Determinante der beiden Fundamentallösungen

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) \tag{6.15}$$

zeitlich konstant ist, da deren Zeitableitung verschwindet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) &\overset{(6.15)}{=} x_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)x_2(t) \\ &\overset{(6.13)}{=} 0 \\ \Rightarrow\ W(t) &= W\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Eine Auswertung der Wronski-Determinante zur Zeit $t+T$ führt auf

$$\begin{aligned} W &\overset{(6.16)}{=} W(t+T) \\ &\overset{(6.15)}{=} x_1(t+T)\dot{x}_2(t+T) - \dot{x}_1(t+T)x_2(t+T) \\ &\overset{(6.14)}{=} \{A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)\}\{A_{21}\dot{x}_1(t) + A_{22}\dot{x}_2(t)\} \\ &\quad - \{A_{11}\dot{x}_1(t) + A_{12}\dot{x}_2(t)\}\{A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t)\} \\ &\overset{(6.15),(6.16)}{=} W\{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}\}\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Die Determinante der Matrix A besitzt demnach folgenden Wert:

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1\,. \tag{6.18}$$

2. Da die zeitlich periodische Funktion $f(t)$ reell ist

$$f(t) = f(t)^*\,, \tag{6.19}$$

ist mit $x(t)$ auch $x(t)^*$ eine Lösung von (6.10). Geht man in (6.10) zum konjugiert Komplexen über, so gilt nämlich mit (6.19):

$$\ddot{x}(t)^* + f(t)x(t)^* = 0\,. \tag{6.20}$$

Demnach sind auch $x_1(t)^*$ und $x_2(t)^*$ Lösungen der Hill-Gleichung (6.10), die sich nach den Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ entwickeln lassen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t)^* \\ x_2(t)^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} . \tag{6.21}$$

Für die hierbei auftretende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

können wir eine wichtige Eigenschaft ableiten, wenn wir das konjugiert Komplexe der Wronski-Determinante berechnen:

$$\begin{aligned} W^* &\overset{(6.16)}{=} W(t)^* \\ &\overset{(6.15)}{=} x_1(t)^* \dot{x}_2(t)^* - \dot{x}_1(t)^* x_2(t)^* \\ &\overset{(6.21)}{=} \{M_{11}x_1(t) + M_{12}x_2(t)\}\{M_{21}\dot{x}_1(t) + M_{22}\dot{x}_2(t)\} \\ &\quad - \{M_{11}\dot{x}_1(t) + M_{12}\dot{x}_2(t)\}\{M_{22}x_1(t) + M_{22}x_2(t)\} \\ &\overset{(6.15),(6.16)}{=} W\{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}\} \\ &= W \det M . \end{aligned} \tag{6.23}$$

Durch zweimalige Verwendung von (6.23) folgt:

$$\begin{aligned} W^* &\overset{(6.23)}{=} W \det M \\ &\overset{(6.23)}{=} W^* |\det M|^2 , \end{aligned} \tag{6.24}$$

so daß wir für die Determinante der Matrix M die folgende Aussage machen können:

$$|\det M|^2 = 1 . \tag{6.25}$$

Da demnach $\det M \neq 0$ ist, existiert die zu M inverse Matrix M^{-1}. Substituiert man nun in (6.21) t durch $t+T$, so folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t+T)^* \\ x_2(t+T)^* \end{pmatrix} &\overset{(6.21)}{=} M \begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} \\ &\overset{(6.14)}{=} MA \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ &\overset{(6.21)}{=} MAM^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t)^* \\ x_2(t)^* \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Der Vergleich vom konjugiert Komplexen von (6.14) und (6.26) führt auf die Matrizenidentität

$$A^* = MAM^{-1} . \tag{6.27}$$

Wir bilden auf beiden Seiten von (6.27) die Spur gemäß der Definition

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \sum_i A_{ii} , \tag{6.28}$$

wobei wir die Rechenregel verwenden, daß innerhalb einer Spur Produkte von Matrizen zy-

klisch vertauscht werden können. Bei der Spur eines Produktes zweier Matrizen gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(AB) &\overset{(6.28)}{=} \sum_i (AB)_{ii} \\ &= \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_i \sum_j B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_j (BA)_{jj} \\ &\overset{(6.28)}{=} \mathrm{Sp}\,(BA)\,, \end{aligned} \tag{6.29}$$

so daß für die Spur eines Produktes vieler Matrizen die zyklische Vertauschung gilt:

$$\mathrm{Sp}\,(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) \overset{(6.29)}{=} \mathrm{Sp}\,(A_n A_1 A_2 \ldots A_{n-1})\,. \tag{6.30}$$

Damit können wir folgern, daß die Spur der Matrix A reell ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(A^*) &\overset{(6.27)}{=} \mathrm{Sp}\left(MAM^{-1}\right) \overset{(6.29)}{=} \mathrm{Sp}\left(M^{-1}MA\right) \\ &= \mathrm{Sp}\,(A)\,. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Die beiden Eigenschaften (6.18) und (6.31) der Matrix A werden wir weiter unten verwenden.

Zunächst zeigen wir, daß es Lösungen $x(t)$ der Hill-Gleichung (6.10) mit der Eigenschaft

$$x(t+T) = \mu x(t) \tag{6.32}$$

gibt. Da sich $x(t)$ nach den Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ entwickeln läßt

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\,, \tag{6.33}$$

erhalten wir aus (6.32):

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t+T) + c_2 x_2(t+T) &\overset{(6.14)}{=} c_1 \left\{A_{11} x_1(t) + A_{12} x_2(t)\right\} + c_2 \left\{A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t)\right\} \\ &= \mu \left\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\right\}\,. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ folgt dann das algebraisches Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{6.35}$$

das in Matrizenschreibweise lautet

$$A^T \vec{c} = \mu \vec{c}. \tag{6.36}$$

Demnach ist $\vec{c}$ der Eigenvektor und μ der Eigenwert der Matrix A^T. Eine nichttriviale Lösung für $\vec{c}$ liegt vor, wenn μ der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(A^T - \mu I\right) = 0 \tag{6.37}$$

genügt. Aufgrund der Determinantenregel

$$\det D = \det D^T \tag{6.38}$$

ist die charakteristische Gleichung (6.37) für A^T identisch mit der für A:

$$\det(A - \mu I) = 0\,. \tag{6.39}$$

Sind μ und $\vec{c}$ durch (6.39) und (6.36) bestimmt, so definiert uns (6.33) eine Lösung $x(t)$ der Hill-Gleichung (6.10) mit der Eigenschaft (6.32). Setzen wir

$$\mu = e^{\lambda T} \tag{6.40}$$

mit dem Floquet-Exponenten λ, so lautet die Eigenschaft (6.32)

$$x(t+T) = e^{\lambda T} x(t)\,. \tag{6.41}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$U(t) = e^{-\lambda t} x(t) \tag{6.42}$$

und substituieren t durch $t+T$:

$$\begin{aligned} U(t+T) &\overset{(6.42)}{=} e^{-\lambda(t+T)} x(t+T) \\ &\overset{(6.41)}{=} e^{-\lambda t} x(t) \\ &\overset{(6.42)}{=} U(t)\,. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Demnach handelt es sich bei $U(t)$ um eine periodische Funktion. Zusammenfassend können wir nun die Floquet-Theorie formulieren. Sie besagt, daß die Hill-Gleichung (6.10) eine Lösung $x(t)$ besitzt, die wegen (6.42) in eine Exponentialfunktion und in eine periodische Funktion (6.43) faktorisiert:

$$x(t) = e^{\lambda t} U(t)\,. \tag{6.44}$$

Der im allgemeinen komplexe Floquet-Exponent λ bestimmt die Stabilität der Lösung $x(t)$. Im Falle $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ bzw. $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ tritt Auf- bzw. Abschaukeln auf, während $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ zu einer stabilen Lösung führt.

Weitergehende Aussagen über die Stabilität der Lösung lassen sich gewinnen, wenn man die charakteristische Gleichung (6.39) mit Hilfe von (6.18) vereinfacht:

$$\begin{aligned} \det(A - \mu I) &= \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \mu \end{vmatrix} \\ &= \mu^2 - (A_{11} + A_{22})\,\mu + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0 \\ &\overset{(6.18)}{=} \mu^2 - \mathrm{Sp}\,(A)\mu + 1 = 0\,. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Es gibt demnach die beiden Eigenwerte

$$\mu_\pm = \frac{\mathrm{Sp}\,(A) \pm \sqrt{(\mathrm{Sp}\,(A))^2 - 4}}{2}\,, \tag{6.46}$$

die wegen (6.18) die Eigenschaft

$$\mu_+\,\mu_- = 1 \tag{6.47}$$

besitzen. Für die gemäß (6.40) definierten Floquet-Exponenten λ_- und λ_+ bedeutet (6.47):

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0\,. \tag{6.48}$$

In Abhängigkeit der Spur von A, die nach (6.31) reell ist, lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. Ist $|\mathrm{Sp}\,(A)| > 2$, so sind μ_+ und μ_- nach (6.46) und damit auch λ_+ und λ_- reell. Aufgrund von (6.48) gibt es dann einen positiven und einen negativen Floquet-Exponenten, so daß Auf- und Abschaukeln auftritt.

2. Ist $|\mathrm{Sp}\,(A)| < 2$, so sind μ_+ und μ_- nach (6.46) und damit auch λ_+ und λ_- zueinander komplex konjugiert. Aus (6.48) folgt dann, daß λ_+ und λ_- rein imaginär sind, so daß die Lösung stabil ist.

Demnach können wir die Stabilitätsgrenze durch die Bedingung

$$|\mathrm{Sp}\,(A)| = 2 \tag{6.49}$$

charakterisieren. Aus (6.46) ergeben sich dann an der Stabilitätsgrenze die Eigenwerte

$$|\mu_\pm| = 1 \tag{6.50}$$

und aus (6.40) die Floquet-Exponenten

$$\lambda_\pm = i\frac{\pi}{T}n; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \tag{6.51}$$

wobei (6.47) bzw. (6.48) zu beachten ist.

6.3 Stabilitätsdiagramm

Wir wenden nun die Floquet-Theorie der Hill-Gleichung (6.10) auf die Mathieu-Gleichung (6.7)

$$\ddot{x}(t) + \{c - 2q\cos 2t\}\, x(t) = 0 \tag{6.52}$$

mit der Periodendauer $T = \pi$ an. Im Falle $q = 0$ lauten die beiden Fundamentallösungen

$$x_1(t) = e^{i\sqrt{c}t}, \qquad x_2(t) = e^{-i\sqrt{c}t}\,. \tag{6.53}$$

Wertet man diese Fundamentallösungen zur Zeit $t + T$ aus

$$\begin{array}{lllll} x_1(t+\pi) & \overset{(6.53)}{=} & e^{i\sqrt{c}(t+\pi)} & \overset{(6.53)}{=} & e^{i\sqrt{c}\pi}x_1(t)\,, \\ x_2(t+\pi) & \overset{(6.53)}{=} & e^{-i\sqrt{c}(t+\pi)} & \overset{(6.53)}{=} & e^{-i\sqrt{c}\pi}x_2(t)\,, \end{array} \tag{6.54}$$

so läßt sich die Matrix A aus (6.14) direkt ablesen:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{c}\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{c}\pi} \end{pmatrix}. \tag{6.55}$$

Die Matrix (6.55) besitzt die Eigenschaften

$$\det A \;=\; e^{i\sqrt{c}\pi}\, e^{-i\sqrt{c}\pi} = 1\,, \tag{6.56}$$

$$\mathrm{Sp}\,(A) \;=\; e^{i\sqrt{c}\pi} + e^{-i\sqrt{c}\pi} = 2\cos(\pi\sqrt{c})\,, \tag{6.57}$$

so daß offensichtlich die beiden Einschränkungen (6.18) und (6.31) erfüllt sind. Nach (6.49) und (6.57) ist die Stabilitätsgrenze charakterisiert durch die Bedingung

$$|\cos(\pi\sqrt{c})| = 1\,, \tag{6.58}$$

die den Parameter c festlegt zu

$$c_n = n^2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{6.59}$$

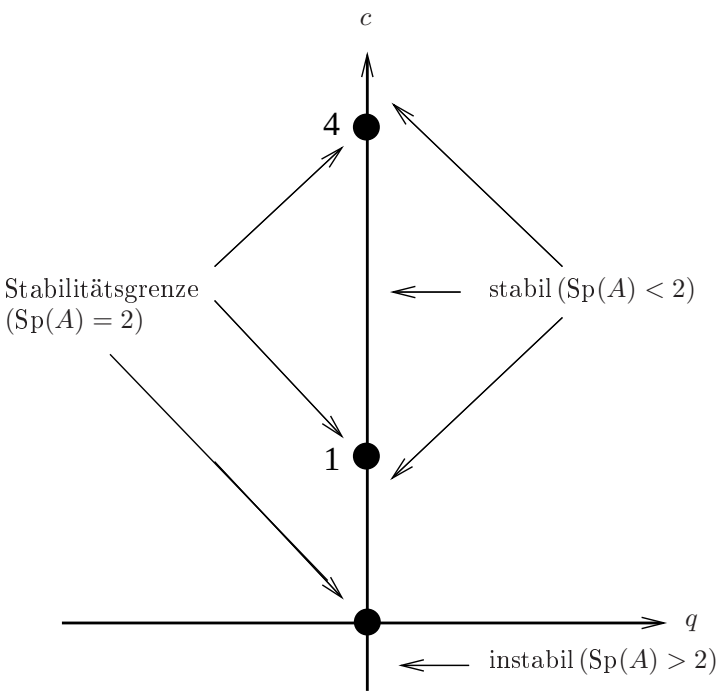
Für alle $c \geq 0$, die der Stabilitätsbedingung (6.59) nicht genügen, gilt gemäß (6.57) offensichtlich $\mathrm{Sp}\,(A) < 2$, so daß es sich um stabile Bereiche handelt. Für $c < 0$ setzen wir $c = -|c|$ und erhalten aus (6.57)

$$\mathrm{Sp}\,(A) = 2\,\cosh(\pi\sqrt{c}) > 2 \tag{6.60}$$

aufgrund der analytischen Forsetzung der cos-Funktion

$$\cos ix = \cosh x\,, \tag{6.61}$$

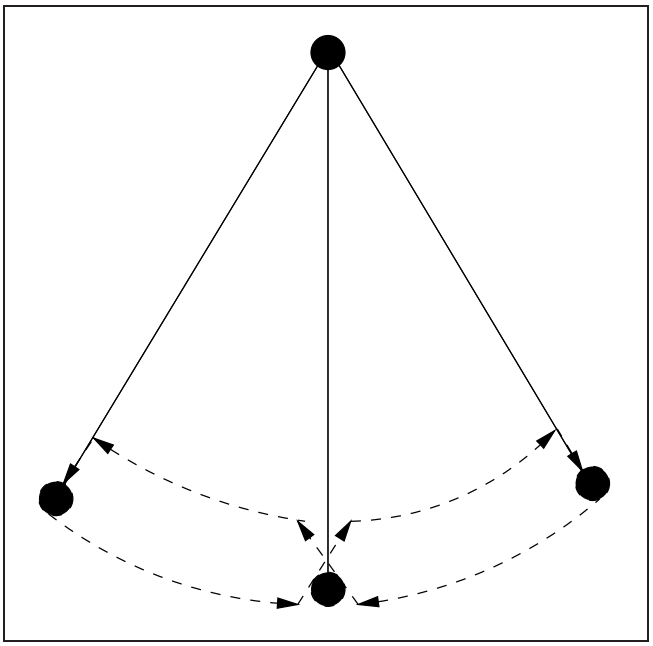
die sich mit Hilfe der Eulerschen Formel (4.11) beweisen läßt. Deshalb handelt es sich bei $c < 0$ um einen instabilen Bereich. Diese Ergebnisse lassen sich nun durch das folgende Stabilitätsdiagramm zusammenfassen: Für das mathematische Pendel mit periodisch bewegtem Aufhängepunkt geht



(6.59) für kleine Auslenkungen aus dem unteren Gleichgewichtspunkt gemäß (6.8) über in

$$\omega_n = \frac{2\omega_0}{n}; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{6.62}$$

Hierbei bezeichnet ω_0 die in (5.11) eingeführte Frequenz der harmonischen Schwingungen bei festem Aufhängepunkt und kleinen Auslenkungen. Demnach tritt die Stabilitätsgrenze bei subharmonischen Frequenzen von $2\omega_0$ auf. Dieses Phänomen ist von der Schaukel gut bekannt, die man idealisierend als Pendel mit einer periodisch veränderlichen Fadenlänge auffassen kann. Der Fall $n = 1$ entspricht dabei dem Heben und Senken während einer Halbschwingung der Schaukel:

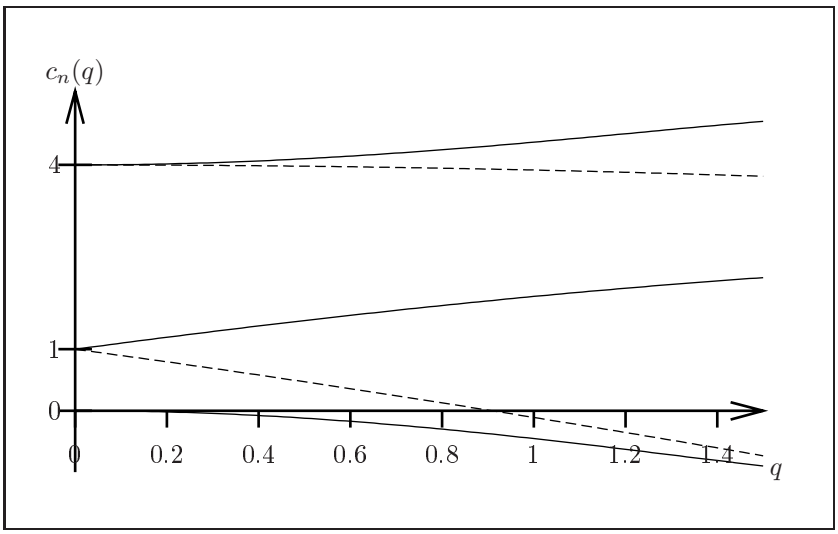


Dieser Fall wird der in der 10. Übungsaufgabe durch Anwendung des Energie- und des Drehimpulserhaltungssatzes näher untersucht.

Im Falle $q \neq 0$ ergeben sich die Stabilitätsgrenzen aus dem Floquet-Theorem (6.43), (6.44) und der Forderung (6.51). Diese Stabilitätsgrenzen werden wir in der 11. Übungsaufgabe mit Hilfe von Kettenbrüchen störungstheoretisch für kleine $q \neq 0$ berechnen. Es zeigt sich, daß die Stabilitätsgrenzen $c = c(q)$ die Symmetrie

$$c(q) = c(-q) \tag{6.63}$$

besitzen. Deshalb beschränken wir uns beim Schaubild des Stabilitätsdiagramms auf den Bereich $q \geq 0$:



Nach (6.8) und (6.9) entspricht der Bereich $c > 0$ bzw. $c \leq 0$ dem mathematischen Pendel am unteren bzw. obenen Gleichgewichtspunkt bei kleinen Auslenkungen. Im Falle $c > 0$ werden aus den Instabilitätspunkten (6.59) für $q = 0$ Instabilitätsbereiche für $q > 0$, die mit wachsendem q größer werden. Im Falle $c \leq 0$ erreicht man für $q > 0$ Stabilität, obwohl ohne periodische Modula-

tion $q = 0$ bei $c = 0$ eine Instabilität vorliegt. Man nennt diesen Effekt dynamische Stabilisierung. Dieser Effekt wird in den sogenannten Paul-Fallen ausgenutzt, um geladene Teilchen in einem elektrischen Quadropolfeld festzuhalten (vgl. 11. Übungsaufgabe).

Kapitel 7

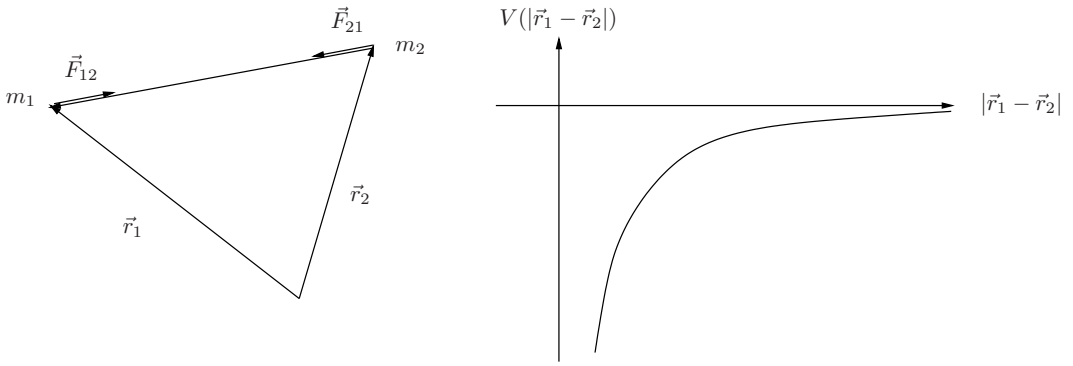
Zweikörper-Problem

Bisher haben wir uns ausführlich mit einigen eindimensionalen mechanischen Systemen mit einem Massenpunkt beschäftigt. Nun wollen wir uns wichtigen mehrdimensionalen mechanischen Systemen mit mehr als einem Massenpunkt zuwenden. In diesem Kapitel betrachten wir ein abgeschlossenes System aus zwei Massenpunkten m_1 und m_2, bei dem die Wechselwirkung zwischen den Massen durch ein Zentralpotential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tag{7.1}$$

beschrieben wird. Zunächst zeigen wir, daß sich dieses Zweikörper-Problem auf ein effektives Einkörper-Problem abbilden läßt. Anschließend werden wir für das effektive Einkörper-Problem die Winkel eliminieren, und die Bewegung anhand der verbleibenden Radialgleichung qualitativ diskutieren.

7.1 Problemstellung



Bei einem Zentralpotential (7.1) wirken zwischen den beiden Massen Kräfte, die dem dritten Newtonschen Axiom "actio = − reactio" genügen:

$$\vec{F}_{12} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}_1} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \tag{7.2}$$

$$\vec{F}_{21} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}_2} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = +\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{7.3}$$

In diesen Rahmen fällt beispielsweise die attraktive Newtonsche Gravitationswechselwirkung, bei der das Zentralpotential gegeben ist durch

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{7.4}$$

mit der Konstanten

$$\alpha = Gm_1m_2 \tag{7.5}$$

(vgl. 4. Übungsaufgabe). Wir wollen aber zunächst die physikalischen Konsequenzen eines allgemeinen Zentralpotentials (7.1) studieren und die Spezialisierung (7.4) erst zu einem späteren Zeitpunkt durchführen.

Die Kräfte (7.2) und (7.3) führen zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen der Massenpunkte m_1 und m_2:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\frac{\partial V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,, \tag{7.6}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = +\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\frac{\partial V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,. \tag{7.7}$$

Hierbei handelt es sich um ein gekoppeltes System von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das die Zeitabhängigkeit der Ortsoperatoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der Massenpunkte m_1 und m_2 festlegt. Dieses Problem besitzt die folgenden Symmetrien:

1. Invarianz unter räumlichen Translationen,
2. Invarianz unter Rotationen,
3. Invarianz unter zeitlichen Translationen.

Aufgrund dieser Symmetrien läßt sich das Problem schrittweise vereinfachen:

1. Die Lösung der Schwerpunktbewegung führt auf ein effektives Einkörper-Problem der Relativbewegung.
2. Die Lösung der Winkelbewegung führt auf eine radiale Differentialgleichung zweiter Ordnung.
3. Eine Integration der Radialgleichung führt auf den Energieerhaltungssatz und damit zu einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Damit läßt sich das Problem für ein allgemeines Zentralpotential (7.1) bis auf ein Integral lösen. Zur Ausführung dieses Integrals muß das Zentralpotential spezifiziert werden.

7.2 Reduktion zum Einkörper-Problem

Die Invarianz des Problems unter räumlichen Translationen tritt deutlicher hervor, wenn man von den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der Massenpunkte zu den Schwerpunktkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \tag{7.8}$$

und den Relativkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1-\vec{r}_2 \tag{7.9}$$

übergeht. Dadurch entkoppelt man nämlich die gekoppelten Bewegungsgleichungen (7.6) und (7.7) in unabhängige Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkts- und die Relativbewegung. Für die Schwerpunktbewegung erhalten wir

$$\ddot{\vec{R}} \overset{(7.8)}{=} \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1+m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1+m_2} \quad \overset{(7.6),(7.7)}{\Longrightarrow} \quad M\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \tag{7.10}$$

mit der Gesamtmasse

$$M = m_1+m_2\,. \tag{7.11}$$

Demnach bleibt der Schwerpunktimpuls erhalten, so daß sich der Schwerpunkt längs einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewegt:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t\,. \tag{7.12}$$

Die Relativbewegung dagegen wird bestimmt durch

$$\ddot{\vec{r}} \overset{(7.9)}{=} \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \overset{(7.6),(7.7)}{=} -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \frac{\partial V(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|}\,, \tag{7.13}$$

so daß wir erhalten

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \frac{\partial V(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}} V(|\vec{r}|) \tag{7.14}$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{7.15}$$

Die Relativbewegung stellt somit ein effektives Einkörper-Problem dar, bei dem sich ein Teilchen der Masse μ im Potential $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ bewegt.

7.3 Reduktion zur Radialgleichung

Für die Relativbewegung ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{7.16}$$

eine Erhaltungsgröße, da dessen zeitliche Ableitung verschwindet:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \overset{(7.14)}{=} \vec{0}\,. \tag{7.17}$$

Demnach befinden sich Ortsvektor $\vec{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$ zu allen Zeiten t in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor $\vec{L}$. Wir wählen nun ein spezielles Koordinatensystem, bei dem der Dehimpulsvektor $\vec{L}$ in z-Richtung zeigt, so daß die Bewegung des effektiven Teilchens in der xy-Ebene erfolgt. Im Falle von Polarkoordinaten lautet der Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{7.18}$$

so daß sich der Geschwindigkeitsvektor zu

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

und der Beschleunigungsvektor zu

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

ergeben. Die Bewegungsgleichung (7.14) geht dann über in

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mu(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial V(r)}{\partial r}\,. \tag{7.21}$$

Projiziert man (7.21) auf die Einheitsvektoren in radialer Richtung

$$\vec{e}_r = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} \overset{(7.18)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

und in tangentialer Richtung

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} \overset{(7.18)}{=} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.23}$$

so erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}, \tag{7.24}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{7.25}$$

Berechnen wir den Drehimpulsvektor (7.16) im Falle der Polarkoordinaten (7.18) und (7.19), so erhalten wir

$$\vec{L} = \mu \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \mu r^2 \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.26}$$

Demnach führt (7.25) auf die Erhaltung (7.17) des Drehimpulsvektors $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}. \tag{7.27}$$

Der Betrag des Drehimpulsvektors stellt demnach ein Integral der Bewegung dar:

$$L = |\vec{L}| = \mu r^2 \dot{\varphi}. \tag{7.28}$$

Mit Hilfe von (7.28) läßt sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in (7.24) eliminieren

$$\mu\ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}. \tag{7.29}$$

Der Drehimpuls führt demnach zu einer Zentrifugalkraft in der radialen Bewegungsgleichung. Man kann sie auf die Form

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \tag{7.30}$$

bringen, wobei sich das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ aus dem Zentralpotential $V(r)$ und einem repulsiven Zentrifugalpotential additiv zusammensetzt:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \tag{7.31}$$

7.4 Energieerhaltung

Multiplikation von (7.30) mit $\dot{r}$ führt auf

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)\right] = 0, \tag{7.32}$$

so daß die Energie des Einkörper-Problems erhalten ist:

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)\,. \tag{7.33}$$

Die Separation der Variablen

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]} \tag{7.34}$$

ergibt eine implizite Bestimmungsgleichung für $r(t)$:

$$t = t_0 \pm \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}}\,. \tag{7.35}$$

Setzt man die so bestimmte Zeitabhängigkeit der Radialkoordinate $r(t)$ in (7.28) ein, so ergibt sich die Zeitabhängigkeit der Winkelkoordinate $\varphi(t)$ gemäß

$$\varphi(t) = \varphi_0 \pm \int_{t_0}^{t} \frac{L}{\mu r(t')^2}\,dt'\,. \tag{7.36}$$

Eliminiert man schließlich aus $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ die Zeit t, so ergibt sich die Bahnkurve $r = r(\varphi)$. Ist man nur an der Bahnkurve $r = r(\varphi)$ interessiert, so kann man diese auch direkt bestimmen:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} \overset{(7.28),(7.34)}{=} \pm\frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}}\,. \tag{7.37}$$

Die Integration von (7.37) ergibt dann eine implizite Bestimmungsgleichung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$:

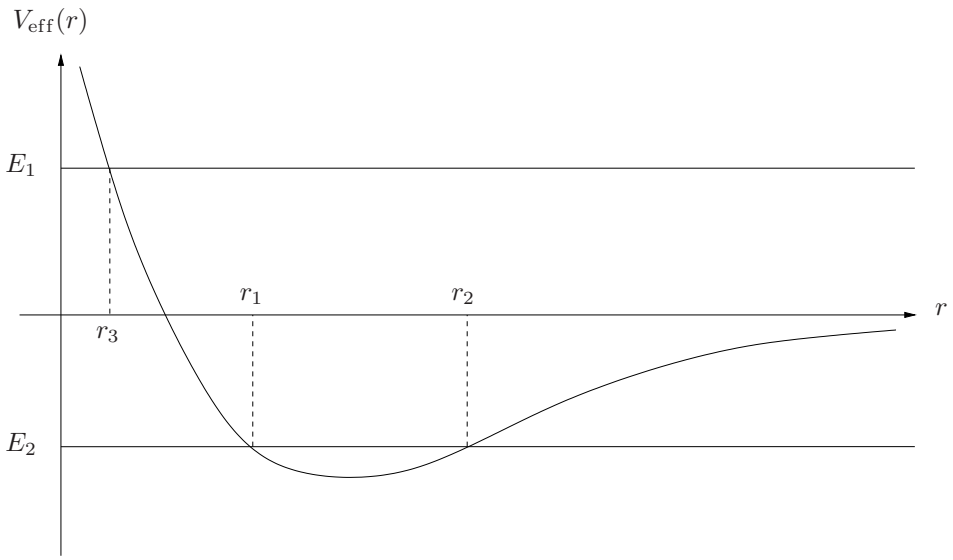
$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{\frac{L}{\sqrt{2\mu}r^2}}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}}\,dr\,. \tag{7.38}$$

7.5 Diskussion der Bewegung

Auch ohne explizite Lösung der verbleibenden Integrale in (7.35), (7.36) und (7.38) lassen sich qualitative Aussagen über die Bewegung machen. Hierzu betrachten wir als Beispiel das Newtonsche Gravitationspotential (7.4), das gemäß (7.31) zum effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{7.39}$$

führt. Zeichnet man den Graphen von $V_{\text{eff}}(r)$, dann gibt dessen Abstand zur Horizontalen E gemäß (7.33) die jeweilige kinetische Energie $\mu\dot{r}^2/2$ an. Abhängig vom Vorzeichen von $\dot{r}$ läuft das Teilchen zum Zentrum hin oder nach außen:



Die Bewegung des Teilchens ist auf diejenigen Bereiche beschränkt, für die $E - V_{\text{eff}}(r) \geq 0$ ist. An den Umkehrpunkten r_i mit

$$E = V_{\text{eff}}(r_i) \tag{7.40}$$

kehrt sich die Bewegung um. Man kann zwei Bewegungstypen unterscheiden:

- Ist $E < 0$, so liegt eine gebundene Bewegung vor, die durch r_1 und r_2 eingegrenzt ist. Wie wir noch sehen werden, handelt es sich bei der Bahnkurve um eine Ellipse bzw. einen Kreis. Dieser Fall liegt z.B. bei der Bewegung der Planeten um die Sonne vor.

- Ist $E > 0$, so liegt eine Streulösung vor. Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen und fliegt zum Umkehrpunkt r_3. Dort kehrt sich die Bewegung um und das Teilchen fliegt vom Zentrum weg. Wie wir noch sehen werden, handelt es sich bei der Bahnkurve um eine Hyperbel bzw. eine Parabel. Dieser Fall liegt z.B. bei der Bewegung von Kometen vor.

Wir diskutieren die gebundene Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten r_1 und r_2 im Falle eines beliebigen Zentralpotentiales $V(r)$ noch etwas eingehender. Die Bewegung erfolgt in der xy-Ebene vollständig in dem ringförmingen Gebiet, das durch die Kreise $r = r_1$ und $r = r_2$ begrenzt wird. Das bedeutet jedoch nicht, daß die Bahn geschlossen ist. Während sich r von r_1 bis r_2 und dann wieder bis r_1 ändert, dreht sich der Ortsvektor gemäß (7.38) um den Winkel

$$\Delta\varphi = \pm 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dfrac{L}{\sqrt{2\mu r^2}}}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}}\, dr\,. \tag{7.41}$$

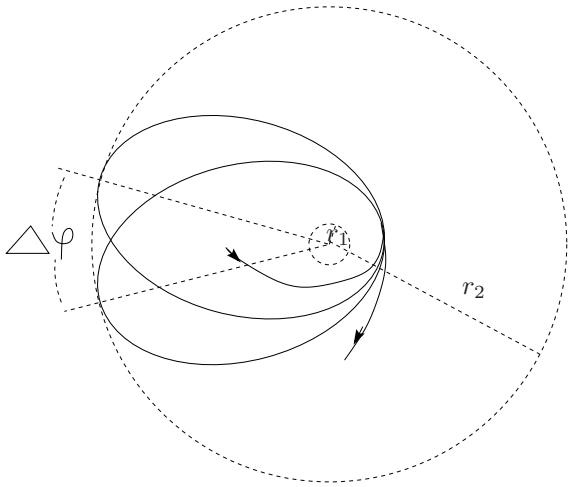
Die Bahn bildet nur dann eine geschlossene Kurve, wenn dieser Winkel ein rationaler Teil von 2π ist, d.h. wenn

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m} \tag{7.42}$$

mit ganzen Zahlen n, m gilt. Nach m-maliger Wiederholung der zugehörigen Zeitperiode hat der Ortsvektor n ganze Umläufe durchgeführt und fällt mit dem Anfangswert wieder zusammen, d.h. die Kurve schließt sich. Es existieren nur zwei Zentralpotentiale, das $1/r$- und das r^2-Potential, bei denen alle Bahnen einer begrenzten Bewegung geschlossen sind. Diese wichtige Aussage wird im Buch

V.I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser Verlag

bewiesen. Bei einer beliebigen Form des Zentralpotentials $V(r)$ wird der Winkel $\Delta\varphi$ kein rationaler Teil von 2π sein. Die Bahn ist dann nicht geschlossen. Beispielsweise wird das Newtonsche Gravitationspotential (7.4) durch das Quadrupolmoment der Sonne (13. Übungsaufgabe), die Gravitationspotentiale anderer Planeten oder durch allgemein relativistische Effekte gestört. Nach jedem Umlauf des Planeten ist dann die Linie vom Zentrum zum sonnennächsten Punkt, dem Perihel der Bahn, ein wenig gedreht:



Beispielsweise ist die Periheldrehung für den Merkur von der Größenordnung einer Bogensekunde pro Umlauf um die Sonne, die etwa 88 Tage dauert. Sie wird zu etwa 9/10 durch das Quadrupolmoment der Sonne bzw. die Gravitationspotentiale anderer Planeten und zu 1/10 durch relativistische Effekte verursacht (vgl. 12. Übungsaufgabe).

Kapitel 8

Das Kepler-Problem

Nun untersuchen wir quantitativ die Bahnkurven, die im Newtonschen Gravitationspotential (7.4) auftreten können. Wir werden sehen, daß die Bahnkurve abhängig von der Energie E eine Ellipse, ein Kreis, eine Hyperbel oder eine Parabel sein kann.

8.1 Bahnkurve

Setzen wir das Newtonsche Gravitationspotential (7.4) in das effektive Potential (7.31) ein, so lautet die implizite Bestimmungsgleichung (7.38) für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{\dfrac{L}{\sqrt{2\mu}r^2}}{\sqrt{E + \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{L^2}{2\mu r^2}}}\, dr\,. \tag{8.1}$$

Mit Hilfe der naheliegenden Substitution

$$u(r) = \frac{1}{r}\,, \quad du = -\frac{1}{r^2}\, dr \quad \Rightarrow \quad dr = -r^2\, du \tag{8.2}$$

geht das Integral (8.1) über in

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/r(\varphi)}^{1/r_0} \frac{du}{\sqrt{E + \alpha u - \dfrac{L^2}{2\mu}u^2}}\,. \tag{8.3}$$

Zur Integration von (8.3) kann man das Standardintegral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arccos\left(\frac{-2Ax - B}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right) \tag{8.4}$$

verwenden, das den Einschränkungen

$$A < 0\,, \quad B^2 - 4AC > 0 \tag{8.5}$$

unterliegt. Identifizieren wir die einzelnen Parametern gemäß

$$A = -\frac{L^2}{2\mu} < 0\,, \quad B = \alpha\,, \quad C = E \quad \Rightarrow \quad B^2 - 4AC = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu} > 0\,, \tag{8.6}$$

so erhalten wir

$$\varphi \quad = \quad \varphi_0 \pm \left\{ \arccos\left(\frac{\frac{L^2}{\mu r_0} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right) - \arccos\left[\frac{\frac{L^2}{\mu r(\varphi)} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right] \right\} . \tag{8.7}$$

Wir führen nun als Abkürzung die Konstante

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \pm \arccos\left(\frac{\frac{L^2}{\mu r_0} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right) \tag{8.8}$$

ein, die durch den Anfangswinkel φ_0 und den Anfangsradius r_0 bestimmt ist. Damit erhalten wir aus (8.7):

$$\varphi - \tilde{\varphi}_0 \quad = \quad \mp \arccos\left[\frac{\frac{L^2}{\mu r\,(\varphi)} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right] , \tag{8.9}$$

bzw. nach einigen Umformungen

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}\, \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)} . \tag{8.10}$$

Beachten wir, daß die Konstante α im Newtonschen Gravitationspotential (7.4) gemäß (7.5) positiv ist, so ergibt sich die endgültige Form der Bahnkurve $r = r(\varphi)$ zu

$$r\,(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\alpha\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\, \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)} . \tag{8.11}$$

Mit dem Parameter

$$p = \frac{L^2}{\alpha\mu} \tag{8.12}$$

und der Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \tag{8.13}$$

besitzt (8.11) die Form eines Kegelschnittes:

$$r\,(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)} . \tag{8.14}$$

Bei einem Kegelschnitt treten abhängig von der Energie E die folgenden Fälle auf:

$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbel
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabel
$0 < \varepsilon < 1$	$-\dfrac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0$	$E = -\dfrac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	Kreis

Wir diskutieren nun getrennt diese möglichen Bahnkurven.

8.2 Ellipse

Wir betrachten zunächst die gebundene Bewegung $-\mu\alpha^2/2L^2 < E < 0$ mit $0 < \varepsilon < 1$ und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{\varphi}_0 = 0$. Aufgrund von (7.18) lautet der Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,. \tag{8.15}$$

(8.15) in (8.14) eingesetzt führt dann auf

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 + \varepsilon \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\,. \tag{8.16}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir hieraus

$$\frac{\left(x + \dfrac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\dfrac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} \quad = \quad 1\,. \tag{8.17}$$

Es handelt sich demnach um die Normalform einer Ellipse

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{8.18}$$

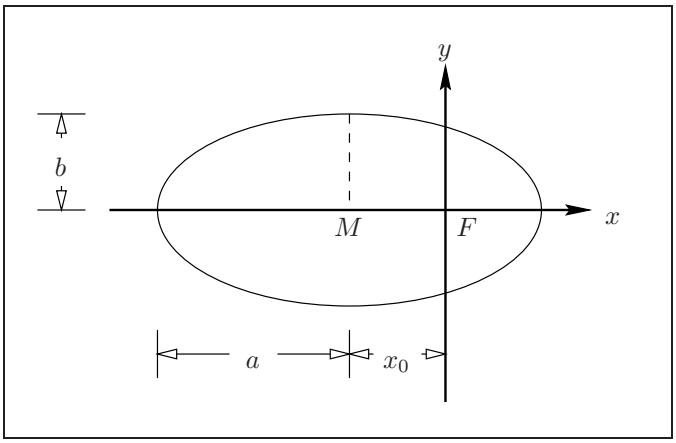
mit den Halbachsen

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} > b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \tag{8.19}$$

und dem Mittelpunkt

$$x_0 = -\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} < 0\,, \quad y_0 = 0\,. \tag{8.20}$$

Offensichtlich entartet die Ellipse im Falle $E = -\mu\alpha^2/2L^2$, d.h. bei $\varepsilon = 0$, zu einem Kreis, da dann die beiden Halbachsen a und b in (8.19) übereinstimmen.



8.3 Kepler-Gesetze

Wir diskutieren nun die ellipsenförmig gebundene Bewegung für ein System, das aus der Erde mit $m_1 = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und aus der Sonne mit $m_2 = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ besteht. Hierzu drücken wir die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ durch die Schwerpunkt- (7.8) und die Relativkoordinaten (7.9) aus:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

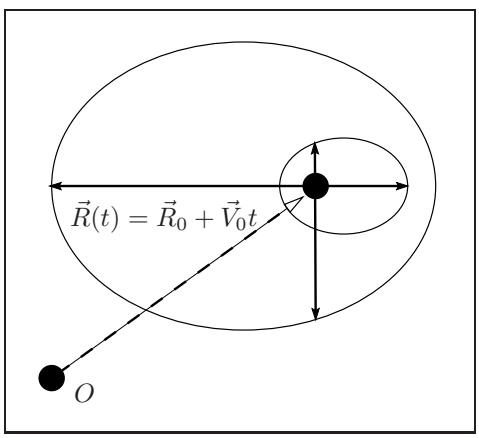
Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem läßt sich mit Hilfe von (4.56) nach $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ auflösen

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & -\dfrac{m_1}{m_1+m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

so daß wir erhalten

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r} \\ \vec{R} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r} \end{pmatrix}. \tag{8.23}$$

Demnach vollführen beide Massenpunkte neben der Schwerpunktsbewegung (7.12) noch gegenläufige Ellipsenbewegungen, wobei der gemeinsame Schwerpunkt im Brennpunkt beider Ellipsen liegt:



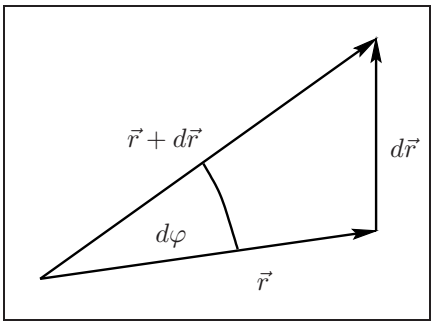
Aufgrund der unterschiedlichen Massen $m_1 \ll m_2$ läßt sich (8.23) nähern durch

$$\vec{r}_1 \approx \vec{R} + \vec{r}, \quad \vec{r}_2 \approx \vec{R} \tag{8.24}$$

und ergibt das erste Keplersche Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt. Bei dieser Näherung werden Terme der Ordnung $m_1/m_2 = 10^{-6}$ vernachlässigt. Bei einem mittleren Abstand von $1,5 \cdot 10^8$ km zwischen Erde und Sonne bedeutet dies, daß die Ellipsenbewegung der Sonne Halbachsen von ca. 10^2 km besitzt, die sehr viel kleiner als ihr Radius von $7 \cdot 10^5$ km sind. Für die Bewegung der Erde sind eher Korrekturen durch den relativ schweren Planeten Jupiter mit $m_3 = 2 \cdot 10^{27}$ kg wichtig, die von der Ordnung $m_1/m_3 = 10^{-3}$ sind.

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, daß die vom Fahrstrahl pro Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant ist. Dies entspricht gerade dem Drehimpulserhaltungssatz (vgl. Abschnitt 3.9):

$$dA = \frac{1}{2}\,|\vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r})| = \frac{1}{2}\,|\vec{r} \times d\vec{r}| \overset{(7.16)}{=} \frac{|\vec{L}|}{2\mu} dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}\,. \tag{8.25}$$



Das dritte Keplersche Gesetz besagt, daß die Quadrate der Umlaufzeiten T verschiedener Planten proportional zur kubischen Potenz der großen Halbachsen a ihrer Elipsenbahnen sind:

$$T^2 = k\,a^3\,. \tag{8.26}$$

Dabei ist die Proportionalitätskonstante k unabhängig vom betrachteten Planeten. Um die Beziehung (8.26) abzuleiten, integrieren wir (8.25) über eine Periode und erhalten dadurch die von der Ellipse eingeschlossene Fläche:

$$A = \int_0^T dt\,\frac{dA}{dt} \overset{(8.25)}{=} T\frac{L}{2\mu} = \pi a b\,. \tag{8.27}$$

Setzen wir (8.12) und (8.13) in (8.19) ein, so lauten die Halbachsen:

$$a = \frac{\alpha}{2\,|E|}\,, \tag{8.28}$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{2\mu\,|E|}}\,. \tag{8.29}$$

Zwischen den beiden Halbachsen a und b besteht demnach die Beziehung

$$\frac{b}{L} \overset{(8.29)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\mu\,|E|}} \overset{(8.28)}{=} \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}}\,. \tag{8.30}$$

Einsetzen von (8.30) in (8.27) führt dann auf (8.26):

$$\frac{T}{2\mu} = \pi a \frac{b}{L} = \pi a \sqrt{\frac{a}{\alpha\mu}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} a^3\,. \tag{8.31}$$

Die Proportionalitätskonstante k in (8.26) hängt gemäß (8.31) genau genommen doch von den Planeten ab:

$$k \;=\; \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} \overset{(7.5),(7.15)}{=} \frac{4\pi^2}{G}\frac{1}{m_1+m_2}\,. \tag{8.32}$$

Im Falle $m_1 \ll m_2$ gilt näherungsweise

$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_2} = \frac{4\pi^2}{6,67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)\,2\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}} = 2,96\cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3} \tag{8.33}$$

unabhängig vom Planeten. Beispielsweise ergibt sich für die Erde

$$k = \frac{T^2}{a^3} = \frac{(365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\,\mathrm{s})^2}{(1,5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^3} = 2,95\cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3} \tag{8.34}$$

in guter Übereinstimmung mit (8.33).

8.4 Hyperbel

Nun betrachten wir die Streulösung $E > 0$ mit $\varepsilon > 1$ und setzen wieder $\tilde{\varphi}_0 = 0$. In diesem Fall geht die Normalform einer Ellipse (8.18)–(8.20) in die Normalform einer Hyperbel über

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{8.35}$$

mit den Halbachsen

$$a \;=\; \frac{p}{\varepsilon^2-1}\,, \tag{8.36}$$

$$b \;=\; \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \tag{8.37}$$

und dem Mittelpunkt

$$x_0 = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2-1} > 0, \quad y_0 = 0. \tag{8.38}$$

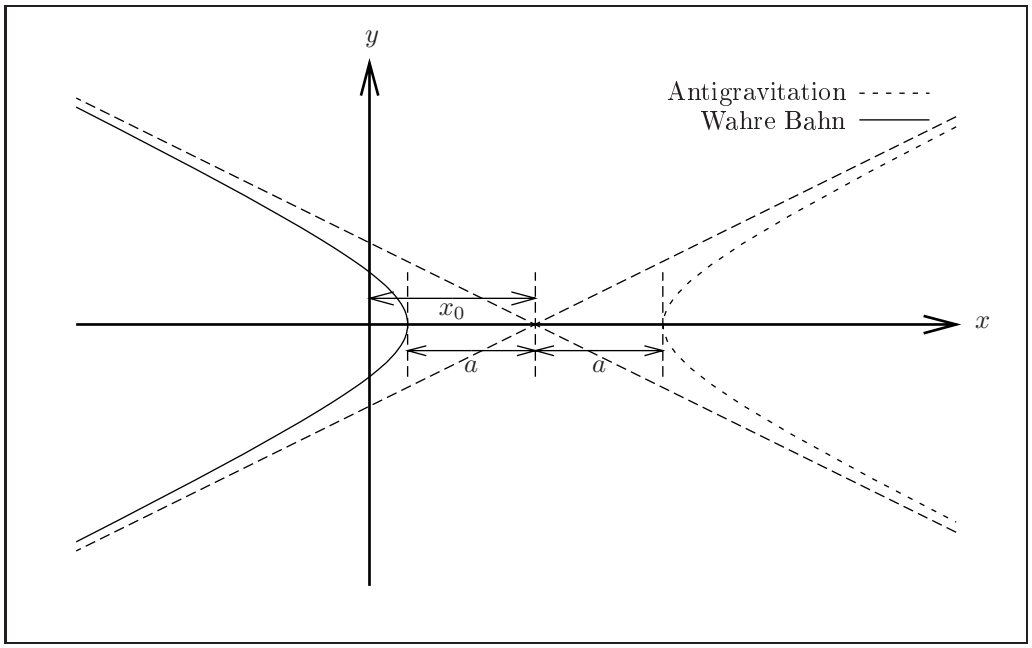
Die Hyperbel (8.35) besitzt die Asymptote

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}\,(x-x_0) \tag{8.39}$$

und durchstößt die Gerade $y = y_0$ bei den Punkten

$$(x_0 \pm a, 0)\,. \tag{8.40}$$

Hierbei ist wegen (8.36) und (8.38) zu beachten, daß $x_0 = \epsilon a$ ist, d.h. es gilt $x_0 > a$ wegen $\varepsilon > 1$. Beispielsweise bewegt sich ein Komet bei seiner Bewegung um die Sonne auf einer solchen Hyperbel. Aus dem Unendlichen kommend wird der Komet aufgrund der attraktiven Newtonschen Gravitationskraft bis zum sonnennächsten Punkt schneller und anschließend wieder langsamer:

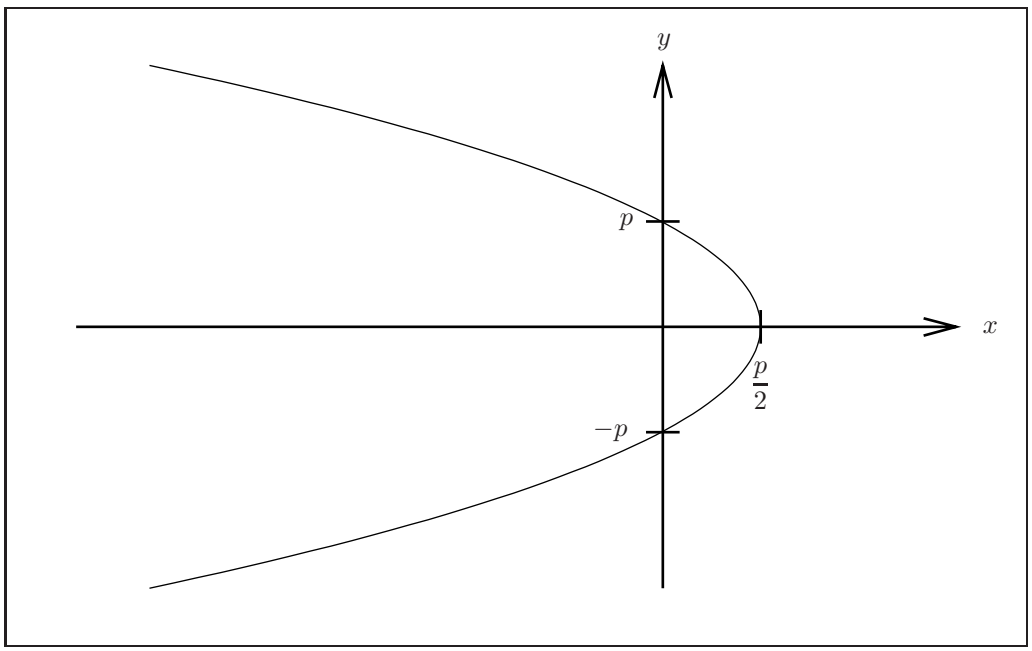


Setzt man (8.37) und (8.38) in (8.35) ein

$$\left[x^2 - 2\frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}x + \frac{\varepsilon^2 p^2}{\left(\varepsilon^2 - 1\right)^2}\right] \frac{\left(\varepsilon^2 - 1\right)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} y^2 = 1\,, \tag{8.41}$$

so artet die Hyperbel im Grenzfall $\varepsilon = 1$ zu einer Parabel aus:

$$x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2}\,. \tag{8.42}$$

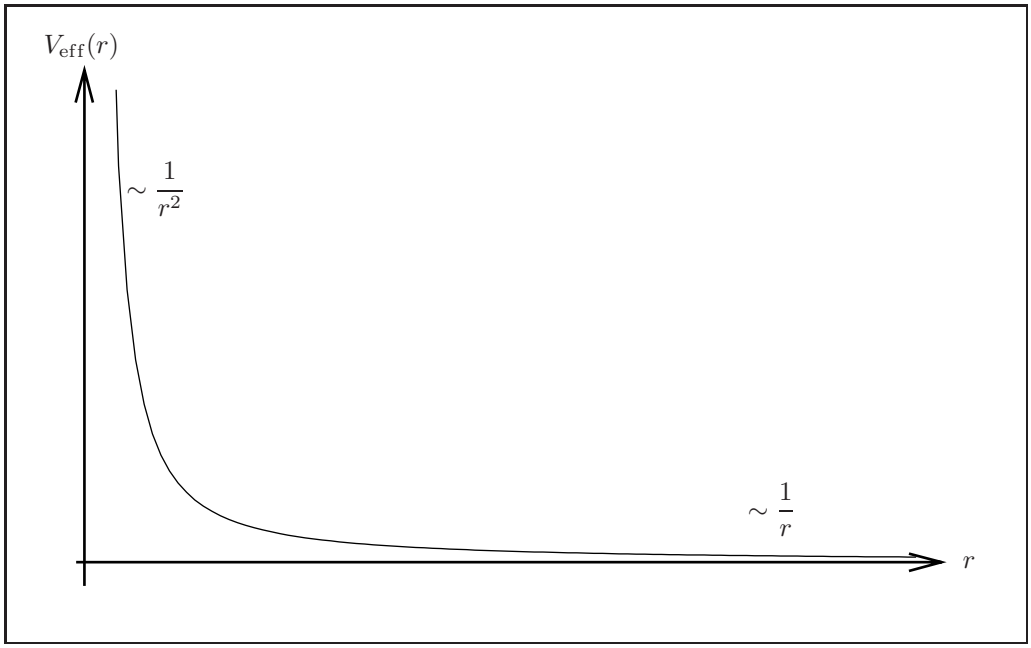


8.5 Coulomb-Potential

Die elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 wird durch das Coulomb-Potential beschrieben. Es besitzt dieselbe Form wie das Newtonsche Gravitationspotential (7.4), die Konstante α ist aber nicht durch (7.5), sondern durch

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{8.43}$$

im SI-Einheitensystem gegeben. Haben Q_1 und Q_2 ein unterschiedliches Vorzeichen, so ist die elektrostatische Wechselwirkung mit $\alpha > 0$ attraktiv und das entsprechende Zweikörper-Problem läßt sich wie beim attraktiven Newtonschen Gravitationspotential (7.4) behandeln. Insbesondere gibt es eine gebundene Lösung, bei der sich beide Punktladungen auf Ellipsenbahnen umkreisen. Diese Überlegung war die Grundlage des Atommodells von Bohr und Sommerfeld für das Wasserstoff-Atom, das aus einem Elektron $Q_1 = -e$ und einem Proton $Q_2 = +e$ besteht. Eine neue Situation tritt allerdings auf, wenn beide Ladungen dasselbe Vorzeichen besitzen, da dann die elektrostatische Wechselwirkung mit $\alpha < 0$ repulsiv wird. Gemäß (7.39) ist in diesem Fall das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ positiv und monoton fallend:



Dann gibt es nur Lösungen mit $E > 0$ und es liegt nur ein Umkehrpunkt vor. Der Bewegungsablauf stellt eine Streuung dar. Geht man bei der Herleitung der Bahnkurve $r = r(\varphi)$ auf (8.10) zurück, so ergibt sich auch für $\alpha < 0$ ein Kegelschnitt (8.14) mit dem Parameter $p < 0$ gemäß (8.12). Die Exzentrizität ist aber nicht mehr durch (8.13), sondern durch

$$\varepsilon = -\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \tag{8.44}$$

gegeben. Da nun $\varepsilon < -1$ vorliegt, ergibt sich wieder die Hyperbel als Bahnkurve, wenn wir die Streuung eines α-Teilchens (=Heliumkern=2 Protonen+2 Neutronen) mit der Ladung $Q_1 = 2e$ an einem Atomkern mit der Ladung $Q_2 = Ze$ betrachten, wobei Z die Kernladungszahl bezeichnet. Aus dem Unendlichen kommend wird das α-Teilchen aufgrund der repulsiven Coulomb-Wechselwirkung bis zum dem Atomkern nächsten Punkt seiner Bahn langsamer und anschließend wieder schneller.

Kapitel 9

Rutherford-Streuung

Streuexperimente sind in der Physik von großer Bedeutung. Dabei läuft ein Strom gleichartiger Teilchen auf eine Ansammlung anderer, im allgemeinen ruhender Teilchen zu. Wenn jedes der einfallenden Projektile maximal an einem Teilchen des Targets streut, dann läßt sich dieser Vorgang auf das schon behandelte Zweikörper-Problem zurückführen. Die Streulösung des Zweikörper-Problems bestimmt dann den Wirkungsquerschnitt des Streuexperimentes. Im folgenden berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung im Schwerpunktsystem. Anschließend diskutieren wir, wie ein Wirkungsquerschnitt vom Schwerpunkt- ins Laborsystem transformiert wird.

9.1 Definition des Wirkungsquerschnittes

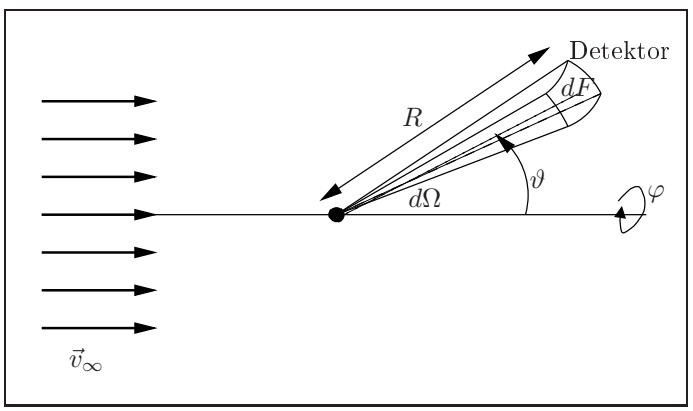
Wir betrachten einen Strahl von Teilchen, die an einem Potential gestreut werden. Wir nehmen an, daß der einfallende Strahl eine über die Strahlbreite homogene Stromdichte I besitzt. Sie ergibt sich aus der Zahl dN der Teilchen, die pro Zeiteinheit dt auf die Fläche dF auftreffen:

$$I = \frac{dN}{dtdF} \,. \tag{9.1}$$

Weit weg vom Streuzentrum haben alle Teilchen im Strahl die gleiche Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty$ und damit auch die gleiche Energie

$$E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2 \,. \tag{9.2}$$

Durch die Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty$ wird die Strahlrichtung ausgezeichnet. Wir stellen uns zunächst vor, daß der Strahl auf genau ein Targetteilchen zuläuft. Die Wechselwirkung zwischen Projektil und Targetteilchen werde durch ein Zentralpotential beschrieben. Wenn wir annehmen, daß sich die Projektilteilchen nicht beeinflussen, so kann der betrachtete Vorgang als eine Überlagerung aus den unabhängigen Streuungen der einzelnen einlaufenden Teilchen behandelt werden:



Jedes gestreute Teilchen wird um einen Winkel ϑ abgelenkt. Da der einfallende Strahl eine Richtung auszeichnet, ist das Streuproblem nicht kugelsymmetrisch wie das Zentralpotential, sondern nur noch zylindersymmetrisch. Deshalb hängt die Zahl der gestreuten Teilchen nicht vom Winkel φ ab. Ein im Abstand R aufgestellter Detektor weist nun alle Teilchen nach, die auf ihn treffen. Dabei sei der Abstand R so groß und die Detektorfläche dF so klein, daß durch den Detektor ein kleiner Raumwinkel definiert wird:

$$d\Omega = \frac{dF}{R^2}\,. \tag{9.3}$$

Dieser Raumwinkel $d\Omega$ stellt ein infinitesimales Flächenelement auf der Oberfläche der Einheitskugel dar, und läßt sich deshalb durch die Winkel φ und ϑ ausdrücken:

$$d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,. \tag{9.4}$$

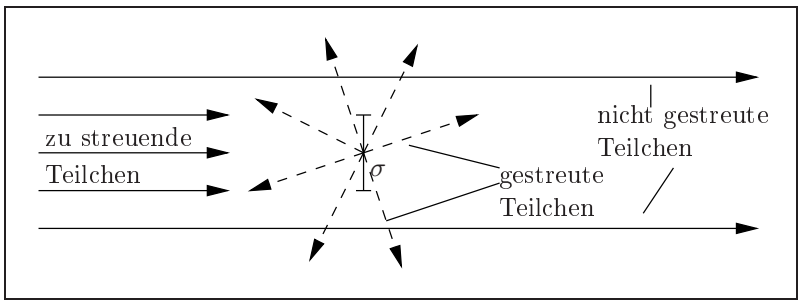
Im Zeitintervall dt weist der Detektor $dN(\vartheta)$ gestreute Teilchen nach. Dabei ist $dN(\vartheta)$ proportional zur Zeit dt, zum Raumwinkel $d\Omega$ und zum Teilchenstrom I. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist daher definiert als:

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen pro Zeit und Raumwinkel}}{\text{Anzahl einfallender Teilchen pro Zeit und Fläche}} = \frac{dN(\vartheta)}{dtd\Omega}\frac{1}{I}\,. \tag{9.5}$$

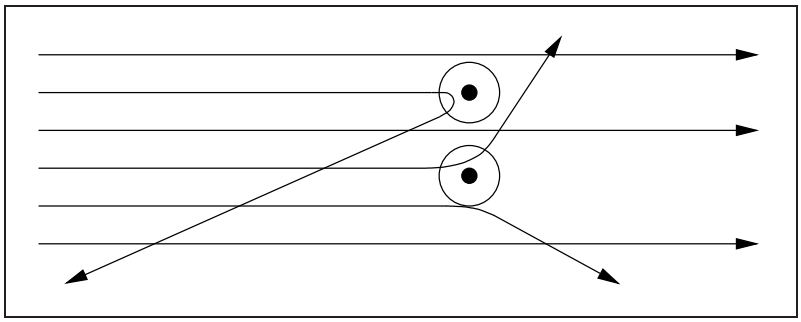
Summieren wir über alle Richtungen, erhalten wir den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \overset{(9.4)}{=} 2\pi \int_0^\pi \sin\vartheta\, \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}\, d\vartheta. \tag{9.6}$$

Nach (9.5) und (9.6) ist die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit gestreuten Teilchen durch σI gegeben. Man kann daher den totalen Wirkungsquerschnitt σ als die Fläche ansehen, an der die einfallende Teilchenstromdichte I effektiv gestreut wird:



Für die Rutherford-Streuung eines α-Teilchens an einem Atomkern, das einen dem Radius $R = 6\,\text{fm}$ ($1\,\text{fm} = 1\,\text{Femtometer} = 10^{-15}\,\text{m}$) besitzt, erwarten wir daher die Größenordnung $\sigma = \pi R^2 = 1\,\text{barn}$ ($= 10^{-24}\,\text{cm}^2 = 10^{-28}\,\text{m}^2$). Die tatsächliche Messung erfolgt immer an einem Target mit vielen Streuzentren. Typischerweise stellt man bei der Rutherford-Streuung eine dünne Folie (z.B. aus Gold) in den einfallenden Strahl. Dabei wählt man die Folie so dünn, daß jedes Projektilteilchen maximal an einem Targetteilchen gestreut wird, und dann ohne weitere Ablenkung die Folie verläßt. Wenn M die Zahl der Streuzentren in der dünnen Folie bezeichnet, dann muß die am Detektor gemessene Streurate lediglich durch M geteilt werden, um sie auf ein einzelnes Streuzentrum zu beziehen.



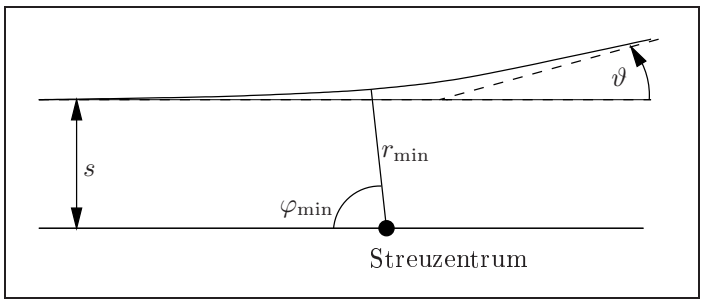
9.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Auf der Grundlage der diskutierten Annahmen können wir den Wirkungsquerschnitt mit Hilfe der Lösung des Zweikörper-Problems berechnen. Alle einfallenden Teilchen besitzen die gleiche Energie (9.2), so daß die Teilchengeschwindigkeit im Unendlichen gegeben ist durch

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}\,. \tag{9.7}$$

Für ein Zentralpotential kann der Streuwinkel ϑ dann nur vom Stoßparameter s, d.h. vom Abstand des gestreuten Teilchens von der Streuachse abhängen:

$$\vartheta = \vartheta(s) \quad \Leftrightarrow \quad s = s(\vartheta). \tag{9.8}$$



Der Stoßparameter s bestimmt den Drehimpuls L des gestreuten Teilchens bezüglich des Streuzentrums:

$$L = \mu s v_\infty \overset{(9.7)}{=} \sqrt{2\mu E}s\,. \tag{9.9}$$

Im einfallenden Strahl kommen Teilchen mit verschiedenen Werten von s vor.

Alle Teilchen mit einem Stoßparameter zwischen s und $s+ds$ werden in denselben Winkelbereich ϑ und $\vartheta+d\vartheta$ gestreut. Da keine Teilchen verloren gehen, muß der einfallende Teilchenstrom zwischen s und $s+ds$ gleich dem Strom der zwischen ϑ und $\vartheta+d\vartheta$ gestreuten Teilchen sein:

$$2\pi s|ds|I \overset{(9.5)}{=} 2\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\vartheta|d\vartheta|I\,. \tag{9.10}$$

Um zu garantieren, daß in der Bilanzgleichung (9.10) beide Seiten positiv sind, wurden die Beträge von ds und $d\vartheta$ verwendet. Im allgemeinen ist zu erwarten, daß der Streuwinkel ϑ mit wachsendem ds abnimmt. Aus der Bilanzgleichung (9.10) lesen wir ab, daß die Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma/d\Omega$ auf die Beziehung $s = s(\vartheta)$ zwischen Stoßparameter s und Streuwinkel ϑ zurückzuführen ist:

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{s(\vartheta)}{\sin\vartheta}\left|\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta}\right|. \tag{9.11}$$

Auf der Bahnkurve des Projektils dreht sich der Ortsvektor $\vec{r}$ von $r_0 = \infty$ mit $\varphi_0 = 0$ bis zum minimalen Abstand $r_{\min}$ um den Winkel

$$\varphi_{\min}(s) \overset{(7.31),(7.38)}{=} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{\sqrt{2\mu}r^2}}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)}}\, dr \overset{(9.9)}{=} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{s}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}\, dr\,. \tag{9.12}$$

Der Umkehrpunkt $r_{\min}$ ist dabei durch die Bedingung (7.40) festgelegt, so daß sich mit dem effektiven Potential (7.31) ergibt

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} + V(r_{\min}) \quad \overset{(9.9)}{\Longrightarrow} \quad 1 = \frac{s^2}{r_{\min}^2} + \frac{V(r_{\min})}{E}\,. \tag{9.13}$$

Da die Bahn bezüglich $r_{\min}$ symmetrisch ist, ändert sich der Ortsvektor $\vec{r}$ um insgesamt um den Winkel $2\varphi_{\min}$. Aus der obigen Abbildung ersieht man, daß der Streuwinkel dann durch

$$\vartheta(s) = \pi - 2\varphi_{\min}(s) \tag{9.14}$$

gegeben ist. Hieraus erhalten wir die gesuchte Beziehung $s = s(\vartheta)$ und nach (9.11) den differentielen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$.

9.3 Rutherfordscher Wirkungsquerschnitt

Wir wenden die bisher erzielten Ergebnisse auf die Streuung von zwei Atomkernen an, die die Kernladungszahlen Z_1, Z_2 und damit die Ladungen $Q_1 = Z_1 e, Q_2 = Z_2 e$ besitzen. Die Wechselwirkung der zwei Atomkerne ist durch das Coulomb-Potential (7.4) mit der negativen Konstante $\alpha = -|\alpha|$ aus (8.43) gegeben. Für den minimalen Abstand $r_{\min}$ erhalten wir aus (9.13)

$$1 - \frac{s^2}{r_{\min}^2} + \frac{\alpha}{r_{\min} E} = 0\,, \tag{9.15}$$

so daß $r_{\min}$ der quadratischen Gleichung

$$r_{\min}^2 + \frac{\alpha}{E} r_{\min} - s^2 = 0 \tag{9.16}$$

genügt, die die Lösungen

$$r_{\min} = \frac{|\alpha|}{2E}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4s^2E^2}{\alpha^2}}\right) \tag{9.17}$$

besitzt. Hierbei müssen wir das Minuszeichen ausschließen, da dies zu einem negativen minimalen Abstand $r_{\min}$ führen würde, und wir erhalten daher

$$r_{\min} = \frac{|\alpha|}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s^2E^2}{\alpha^2}}\right)\,. \tag{9.18}$$

Den minimalen Abstand (9.18) hätten wir auch direkt aus der Form (8.14) des Kegelschnittes ablesen können:

$$\begin{aligned} r_{\min} &= r(\tilde{\varphi}_0) \overset{(8.14)}{=} \frac{p}{1+\epsilon} \overset{(8.12),(8.44)}{=} \frac{\frac{L^2}{\alpha\mu}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}} \overset{(9.9)}{=} \frac{\frac{2Es^2}{|\alpha|}}{\sqrt{1 + \frac{4E^2s^2}{\alpha^2}} - 1} \\ &= \frac{\frac{2Es^2}{|\alpha|}\left(\sqrt{1 + \frac{4E^2s^2}{\alpha^2}} + 1\right)}{\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}} = \frac{|\alpha|}{2E}\left(\sqrt{1 + \frac{4E^2s^2}{\alpha^2}} + 1\right)\,. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Nun setzen wir (7.4) in (9.12) ein, und berechnen den zum minimalen Abstand $r_{\min}$ gehörenden Winkel $\varphi_{\min}$:

$$\varphi_{\min}(s) \overset{(7.4),(9.12)}{=} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{s}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}+\frac{\alpha}{Er}}}\,dr \overset{(8.2)}{=} s\int_{0}^{1/r_{\min}} \frac{1}{\sqrt{-s^2u^2+\frac{\alpha}{E}u+1}}\,du$$
$$\overset{(8.4),(8.5)}{=} \arccos\frac{\frac{2s^2}{r_{\min}}-\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}} - \arccos\frac{-\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}}\,. \tag{9.20}$$

Wendet man das Additionstheorem

$$\arccos x - \arccos y = \arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \tag{9.21}$$

auf (9.20) an, so folgt

$$\begin{aligned}\varphi_{\min}(s) &= \arccos\left(\frac{\frac{\alpha^2}{E^2}-\frac{2s^2\alpha}{Er_{\min}}}{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}+\sqrt{1-\frac{\left(\frac{2s^2}{r_{\min}}-\frac{\alpha}{E}\right)^2}{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}}\sqrt{1-\frac{\left(\frac{\alpha^2}{E^2}\right)^2}{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}}\right)\\ &= \arccos\frac{\frac{\alpha^2}{E^2}-\frac{2s^2\alpha}{Er_{\min}}+4s^2\sqrt{1-\frac{s^2}{r_{\min}^2}+\frac{\alpha}{Er_{\min}}}}{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2}\,.\end{aligned} \tag{9.22}$$

Mit Hilfe des minimalen Abstandes (9.18) vereinfacht sich (9.22):

$$\varphi_{\min}(s) = \arccos\frac{\frac{\alpha^2}{E^2}-\frac{2s^2\alpha}{E}\frac{2E}{|\alpha|}\left(1-\sqrt{1+\frac{4s^2E^2}{\alpha^2}}\right)}{\frac{\alpha^2}{E^2}+4s^2} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}}}\,.$$

Diesen Winkel hätten wir auch direkt aus der Form (8.14) des Kegelschnittes ablesen können. Aus der Bedingung

$$r(\varphi_{\min}+\tilde{\varphi}_0) \overset{(8.14)}{=} \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi_{\min}} = \infty \tag{9.23}$$

folgt nämlich

$$\varphi_{\min} = \arccos\frac{-1}{\epsilon} \overset{(8.44)}{=} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}}}\,. \tag{9.24}$$

Für den Tangens des Winkels $\varphi_{\min}$ erhalten wir

$$\tan\varphi_{\min}(s) = \frac{\sin\varphi_{\min}(s)}{\cos\varphi_{\min}(s)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi_{\min}(s)}}{\cos\varphi_{\min}(s)} \overset{(9.24)}{=} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E^2s^2}{\alpha^2}}}} = \frac{2Es}{|\alpha|}\,. \tag{9.25}$$

Deshalb ergibt sich der Kotangens des halben Streuwinkels ϑ zu

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta(s)}{2} \overset{(9.14)}{=} \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}-\varphi_{\min}(s)\right] = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\varphi_{\min}(s)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-\varphi_{\min}(s)\right]}$$
$$= \overset{(4.93),(4.94)}{=} \tan\varphi_{\min}(s) \overset{(9.25)}{=} \frac{2Es}{|\alpha|}\,. \tag{9.26}$$

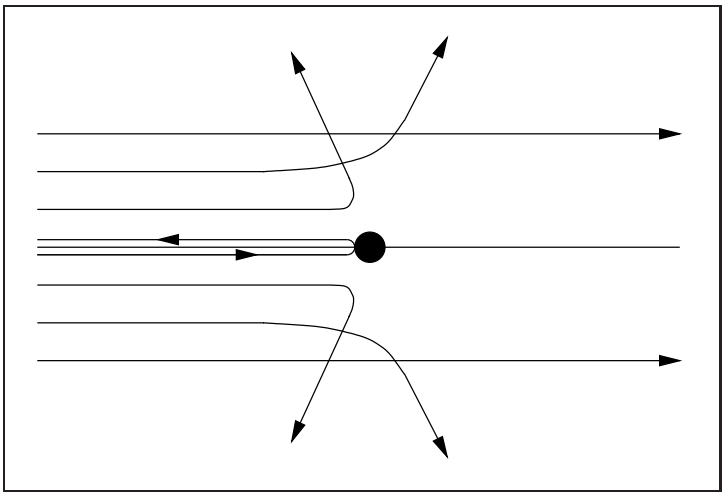
Die Invertierung von (9.26) führt auf den Stoßparameter s als Funktion des Streuwinkels ϑ:

$$s(\vartheta) = \frac{|\alpha|}{2E}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,. \tag{9.27}$$

Hieraus ergeben sich die Spezialfälle

$$s(0)=\infty\,, \qquad s(\pi)=0\,, \tag{9.28}$$

so daß die Bahnkurven für verschiedene Stoßparameters s folgendermaßen aussehen:



Die Ableitung von (9.27) lautet

$$\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{|\alpha|}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{9.29}$$

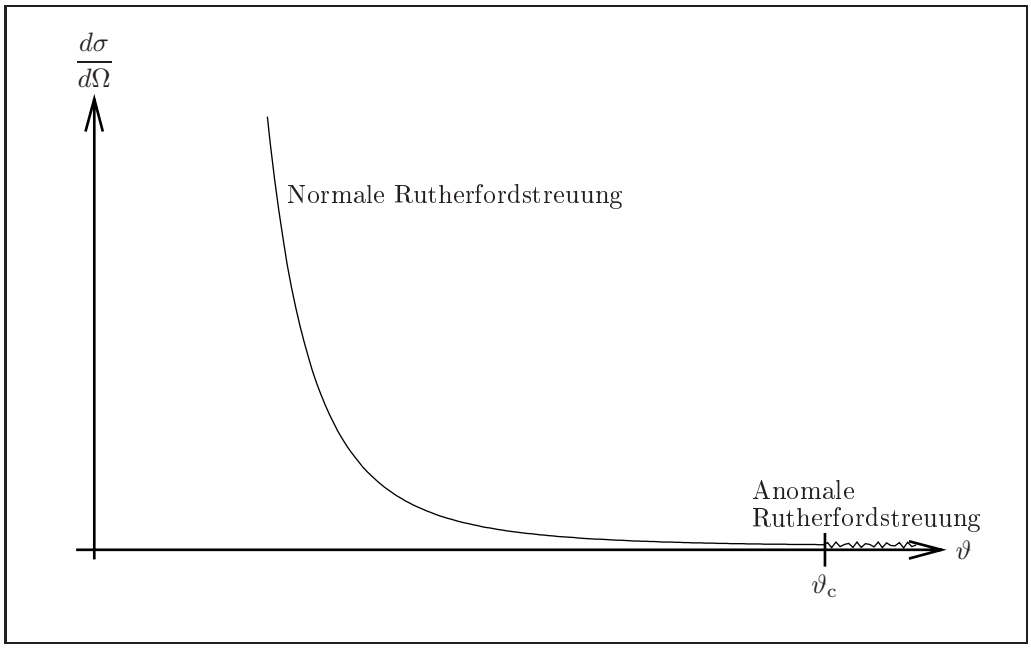
Einsetzen von (9.27) und (9.29) in (9.11) führt auf den differentiellen Rutherfordschen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{1}{2\sigma\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}\frac{|\alpha|}{2E}\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\frac{|\alpha|}{4E}\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \overset{(8.43)}{=} \left(\frac{Q_1Q_2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{9.30}$$

Der experimentelle Nachweis der Winkelabhängigkeit (9.30) erfolgte im Jahre 1913. Er bestätigte, daß das Streupotential für die α-Teilchen tatsächlich die Coulomb-Form (7.4) mit (8.43) besitzt, und daß die Masse des Atoms zum größten Teil im Bereich $r < r_{\min}$ lokalisiert ist. Da der gemäß (9.18) bestimmte minimale Abstand $r_{\min}$ viel kleiner als der damals bereits bekannte Atomradius von einigen Ångström ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$) war, war dies zugleich eine Bestätigung des Rutherfordschen Atommodells aus dem Jahre 1911, das einen Atomkern annahm.

Die Größe das Atomkerns kann durch die anomale Rutherford-Streuung abgeschätzt werden. Bei sehr schnellen α-Teilchen mit einer Energie $E_c = 6\,\text{MeV}$ und einem großen Winkel von etwa

$\vartheta_c = 160°$ beobachtet man deutliche Abweichungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes vom Rutherfordgesetz (9.30):



Die anomale Rutherford-Streuung tritt bei sehr kleinen Stoßparametern auf:

$$s_c \overset{(8.43),(9.27)}{=} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_c} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_c}{2} \approx 5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{fm}\,. \tag{9.31}$$

α-Teilchen und Atomkern kommen sich bei diesem Stoßparameter so nahe, daß neben der Coulomb-Wechselwirkung noch eine neue kurzreichweitige Wechselwirkung wirksam wird, die Kernkraft. Mit dem kritischen Stoßparameter (9.31) kann man abschätzen, daß der Kernradius die Größe von ca. $10^{-15}\,\mathrm{m}\,(= 1\,\mathrm{fm} = 1\,\mathrm{Femtometer})$ besitzt.

In der Quantenmechanik werden die α-Teilchen durch Wellen beschrieben. Hierbei ist die De-Broglie-Wellenlänge von derselben Größenordnung wie der betrachtete Atomkern:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 5{,}85\,\mathrm{fm}\,. \tag{9.32}$$

Die Streuung der α-Teilchen am Atomkern ist damit quantenmechanisch als Beugung zu behandeln. Es ist daher zu erwarten, daß das klassische Rutherford-Gesetz (9.30) quantenmechanisch modifiziert wird. Erstaunlicherweise zeigt sich aber für das Coulomb-Potential (7.4) mit (8.43), daß der quantenmechanische differentielle Wirkungsquerschnitt genau mit dem klassischen Ergebnis (9.30) übereinstimmt.

Berechnet man den totalen Wirkungsquerschnitt für das Rutherfordgesetz (9.30), so stellt man fest, daß dieser divergiert. Dies liegt daran, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt (9.30) für $\vartheta \to 0$ eine zu große Divergenz besitzt. Sie rührt daher, daß auch Teilchen mit großem Stoßparameter gestreut werden, wenn auch um einen immer kleineren Winkel. Man spricht deshalb davon, daß das Coulomb-Potential (7.4) mit (8.43) eine unendliche Reichweite besitzt. Im tatsächlichen Experiment wird das Coulomb-Potential (7.4) mit (8.43) bei großen Abständen z.B. durch die Atomhülle abgeschirmt, seine Reichweite also begrenzt. Daher erfahren die Teilchen mit einem Stoßparameter größer als der Atomradius keine Ablenkung mehr, und der experimentell gemessene Wirkungsquerschnitt ist endlich.

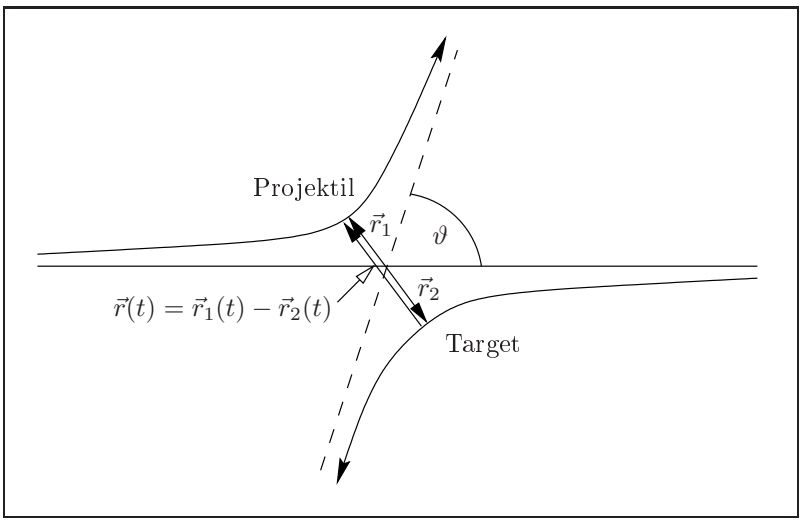
9.4 Transformation ins Laborsystem

Aufgrund der Reduktion des Zweikörper-Problems auf ein effektives Einkörper-Problem in Kapitel 7 haben wir bisher die Relativbewegung so diskutiert, als ob sich ein Teilchen der reduzierten Masse μ in einem Zentralpotential bewegen würde. Nur in diesem effektiven Einkörper-Bild haben wir bisher den Wirkungsquerschnitt abgeleitet. Wir wollen nun den Wirkungsquerschnitt wieder auf das ursprünglich zugrunde liegende Zweikörper-Problem beziehen.

Hierbei betrachten wir als Bezugssystem zunächst das Schwerpunktsystem, in dem der Schwerpunkt gemäß $\vec{R} = \vec{0}$ ruht. Nach (8.23) ist dann die Bewegung der einzelnen Massenpunkte direkt mit der Relativbewegung verknüpft:

$$\vec{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r}(t)\,, \quad \vec{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r}(t)\,. \tag{9.33}$$

Ein Beobachter im Schwerpunktsystem sieht demnach, daß sich beide Teilchen auf Hyperbelbahnen direkt aufeinander zubewegen und sich nachher direkt voneinander wegbewegen:



Der Winkel zwischen Anfangs- und Endrichtung des Relativvektors stimmt im Schwerpunktsystem mit dem Streuwinkel jedes Teilchens überein. Da außerdem jedem Teilchen der reduzierten Masse μ im reduzierten Einkörper-Problem ein Projektilteilchen entspricht, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der Projektile im Schwerpunktssystem durch (9.11) definiert.

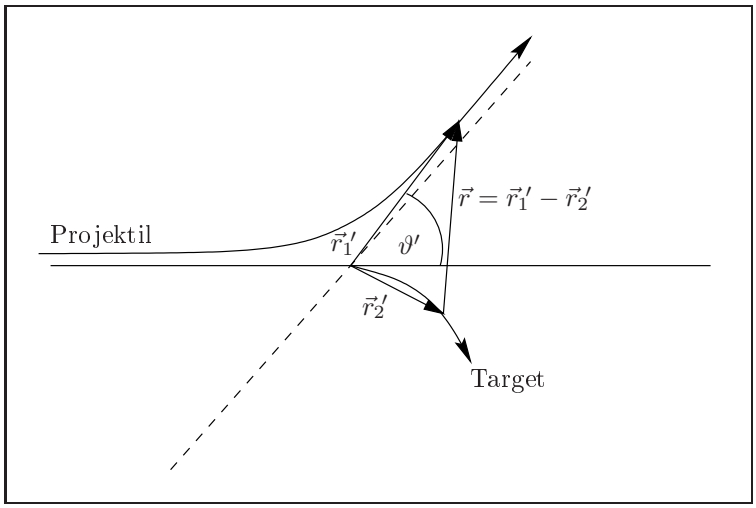
Im tatsächlichen Experiment ist die Situation allerdings eine andere. Im Laborsystem werden α-Teilchen auf eine vor der Streuung ruhende Goldfolie geschossen. Bei der Streuung wird ein Teil des Projektilimpulses auf den Goldkern des Targetteilchens übertragen, so daß sich dieser nach der Streuung bewegt. Der Streuwinkel ϑ' des Projektils im Laborsystem ist dann nicht mehr mit dem Drehwinkel ϑ des Relativvektors identisch. Wir wollen im folgenden den Zusammenhang zwischen den Streuwinkeln ϑ und ϑ' im Schwerpunkt- und im Laborsystem bestimmen.

Da der Schwerpunkt im Ursprung des Schwerpunktsystems ruht, bezeichnet

$$\vec{R}'(t) = \frac{m_1\vec{r}_1{}'(t) + m_2\vec{r}_2{}'(t)}{m_1 + m + 2} \overset{(7.12)}{=} \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t \tag{9.34}$$

den Vektor vom Ursprung des Laborsystems zu dem des Schwerpunktsystems. Die Ortsvektoren der beiden Teilchen transformieren sich dann gemäß

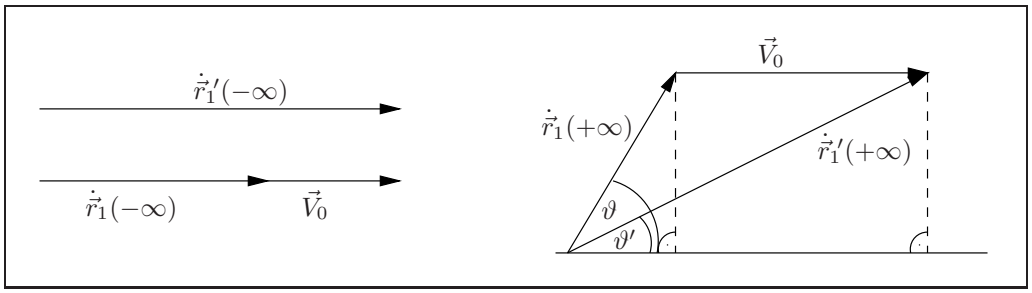
$$\vec{r}_1{}'(t) = \vec{R}'(t) + \vec{r}_1(t)\,, \quad \vec{r}_2{}'(t) = \vec{R}'(t) + \vec{r}_2(t)\,, \tag{9.35}$$



so daß sich die Geschwindigkeiten ergeben zu

$$\dot{\vec{r}}_1'(t) = \vec{V}_0 + \dot{\vec{r}}_1(t)\,, \quad \dot{\vec{r}}_2'(t) = \vec{V}_0 + \dot{\vec{r}}_2(t)\,. \tag{9.36}$$

Für die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_1'(t)$ des Projektils gilt daher für $t = -\infty$ vor dem Stoß und für $t = +\infty$ nach dem Stoß:



Zwischen den Winkeln ϑ und ϑ' besteht demnach die folgende Beziehung:

$$\tan\vartheta' = \frac{|\dot{\vec{r}}_1'(+\infty)|\sin\vartheta'}{|\dot{\vec{r}}_1'(+\infty)|\cos\vartheta'} = \frac{|\dot{\vec{r}}_1(+\infty)|\sin\vartheta}{|\dot{\vec{r}}_1(+\infty)|\cos\vartheta + |\vec{V}_0|}\,. \tag{9.37}$$

Für die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_1(+\infty)$ gilt nach (9.33)

$$\dot{\vec{r}}_1(+\infty) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\dot{\vec{r}}(+\infty)\,, \tag{9.38}$$

während sich die Geschwindigkeit $\vec{V}_0$ aus (9.33), (9.36) und der Anfangsbedingung $\dot{\vec{r}}_2'(-\infty) = \vec{0}$ ergibt:

$$\vec{V}_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\dot{\vec{r}}(-\infty)\,. \tag{9.39}$$

Andererseits folgt aus dem Energieerhaltungssatz des Einkörper-Problems

$$E = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}(-\infty)|^2 = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}(+\infty)|^2 \tag{9.40}$$

die Identität

$$|\dot{\vec{r}}(-\infty)| = |\dot{\vec{r}}(+\infty)|\,. \tag{9.41}$$

Einsetzen von (9.38), (9.39) und (9.41) in (9.37) führt auf die Beziehung zwischen den Streuwinkeln ϑ und ϑ' im Schwerpunkt- und im Laborsystem:

$$\tan\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \dfrac{m_1}{m_2}}\,. \tag{9.42}$$

Im Falle $m_1 \ll m_2$, wenn sich also das Target nach der Streuung näherungsweise nicht bewegt, geht (9.42) über in

$$\vartheta' \approx \vartheta\,, \quad m_1 \ll m_2\,. \tag{9.43}$$

Im Spezialfall $m_1 = m_2$ erhält man dagegen aus (9.42)

$$\tan\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + 1} = \frac{2\sin\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{\vartheta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}} = \tan\frac{\vartheta}{2}\,, \tag{9.44}$$

d.h. es gilt

$$\vartheta' = \frac{\vartheta}{2}\,, \quad m_1 = m_2\,. \tag{9.45}$$

Nun können wir den Zusammenhang zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten $d\sigma'/d\Omega'$ und $d\sigma/d\Omega$ im Labor- und im Schwerpunktsystem bestimmen. Da durch den Übergang zwischen Labor- und Schwerpunktsystem die Zeit erhalten bleibt, muß die Zahl der gestreuten Projektilteilchen pro Zeit in den zueinander gehörenden Raumwinkeln $d\Omega$ und $d\Omega'$ gleich sein. Nach der Definition (9.5) gilt dann

$$I\frac{d\sigma}{d\Omega}2\pi\sin\vartheta d\vartheta = I'\frac{d\sigma'}{d\Omega'}2\pi\sin\vartheta' d\vartheta'\,. \tag{9.46}$$

Die Stromdichte I' des im Laborsystem einlaufenden Strahls ist gleich der Stromdichte I in (9.1) im Schwerpunktssystem bzw. im reduzierten Einkörper-Problem:

$$I = I'\,. \tag{9.47}$$

Demnach ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt im Laborsystem gemäß

$$\frac{d\sigma'(\vartheta')}{d\Omega'} = \frac{\sin\vartheta(\vartheta')}{\sin\vartheta'}\frac{d\vartheta(\vartheta')}{d\vartheta'}\frac{d\sigma(\vartheta(\vartheta'))}{d\Omega}\,. \tag{9.48}$$

Im ersten Spezialfall (9.43) folgt aus (9.48)

$$\frac{d\sigma'(\vartheta')}{d\Omega'} = \frac{d\sigma(\vartheta')}{d\Omega}\,, \quad m_1 \ll m_2\,, \tag{9.49}$$

während sich (9.48) im zweiten Spezialfall (9.45) reduziert auf

$$\frac{d\sigma'(\vartheta')}{d\Omega'} = 4\cos\vartheta'\frac{d\sigma(2\vartheta')}{d\Omega}\,. \tag{9.50}$$

Bespielsweise lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Rutherford-Streuung zweier gleich schwerer Teilchen im Laborsystem nach (9.30) und (9.50):

$$\frac{d\sigma'(\vartheta')}{d\Omega'} = \left(\frac{Q_1Q_2}{8\pi\epsilon_0 E}\right)^2\frac{\cos\vartheta'}{\sin^4\vartheta'}\,. \tag{9.51}$$

Kapitel 10

System von Massenpunkten

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Dynamik eines einzelnen Massenpunktes auf ein System von Massenpunkten. Dabei führen wir mit dem Schwerpunkt, dem Gesamtimpuls, dem Gesamtdrehimpuls und der Gesamtenergie globale Observablen ein, die das gesamte System von Massenpunkten charakterisieren.

10.1 Newtonsche Grundgleichung

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten, die mit $i = 1, 2, \ldots, N$ durchnummeriert werden. Hierbei wird die Bahnkurve des i-ten Massenpunktes durch den Ortsvektor $\vec{r}_i(t)$ beschrieben, während seine Masse mit m_i und die auf ihn wirkende Kraft mit $\vec{F}_i$ bezeichnet wird. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt dann die Newtonsche Grundgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \,. \tag{10.1}$$

Bei den wirkenden Kräften unterscheidet man zwischen inneren und äußeren Kräften. Die inneren Kräfte sind diejenigen, die die Massenpunkte des Systems aufeinander ausüben. Nach dem dritten Newtonschen Axiom "actio = – reactio" von Abschnitt 3.3 gilt für die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$, die das j-te Teilchen auf das i-te Teilchen ausübt, die Beziehung

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \,. \tag{10.2}$$

Sie ist erfüllt, wenn die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ konservativ sind und sich gemäß

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij} \left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) \tag{10.3}$$

aus einem Potential mit der Eigenschaft

$$U_{ij} \left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = U_{ij} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) = U_{ji} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \tag{10.4}$$

herleiten lassen. Beispielsweise verursacht bei einem Sternhaufen die Gravitationswechselwirkung zwischen den Sternen die inneren Kräfte

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \,, \tag{10.5}$$

die das Potential

$$U_{ij} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) = -G \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \tag{10.6}$$

besitzen (vgl. 4. Übungsaufgabe). Die äußeren Kräfte $\vec{F}^{(a)}$ sind diejenigen, die von außen auf das System von Massenpunkten einwirken. Beispielsweise sind die Moleküle eines Gases der äußeren Gravitationskraft unterworfen. Demnach lassen sich die in (10.1) wirkenden Kräfte $\vec{F}_i$ zerlegen in

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \,. \tag{10.7}$$

10.2 Schwerpunkt

Wenn wir jeden einzelnen Radiusvektor $\vec{r}_i$ mit der Masse m_i gewichten, erhalten wir als arithmetisches Mittel den Ortsvektor $\vec{R}$ des Schwerpunktes aller Massenpunkte:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \,. \tag{10.8}$$

Hierbei bezeichnet

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{10.9}$$

die Gesamtmasse des Systems. Wir stellen nun die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt auf:

$$M\ddot{\vec{R}} \overset{(10.8)}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \overset{(10.1)}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \overset{(10.7)}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \,. \tag{10.10}$$

Aufgrund des dritten Newtonschen Axioms (10.2) verschwindet in (10.10) die Summe über die inneren Kräfte. Formal erkennt man dies dadurch, daß man die Summationsindizes umbenennt, die Reihenfolge der Summation vertauscht und das dritte Newtonsche Axiom (10.2) anwendet:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ji} \overset{(10.2)}{=} -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{0} \,. \tag{10.11}$$

Aus (10.10) und (10.11) ergibt sich dann der Schwerpunktsatz

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(a)} \,. \tag{10.12}$$

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt wäre und als ob die Summe der äußeren Kräfte

$$\vec{F}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \tag{10.13}$$

auf ihn wirken würde. Daraus können wir die folgenden Schlußfolgerungen ziehen:

- Die inneren Kräfte sind ohne Einfluß auf die Bewegung des Schwerpunktes. Salopp gesprochen bedeutet dies, daß man sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen kann.
- Der Schwerpunktsatz rechtfertigt im nachhinein die Idealisierung realer Körper als Massenpunkte. Wenn die inneren Bewegungen eines Festkörpers, wie z.B. seine Rotationen oder seine Schwingungen, nicht von Interesse sind, können wir den gesamten Körper als einen Massenpunkt der Masse M behandeln, für den eine Newton-Gleichung der Form (10.12) gilt.

- Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System, das keine Wechselwirkungen mit Vorgängen außerhalb des Systems hat. Da es für ein abgeschlossenes System keine äußeren Kräfte

$$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{0} \quad \overset{(10.13)}{\Longrightarrow} \quad \vec{F}^{(a)} = \vec{0} \tag{10.14}$$

gibt, folgt aus (10.12), daß der Schwerpunktimpuls

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \tag{10.15}$$

erhalten bleibt. Für die Beschreibung der Bewegung des Massenpunktes wird man vorzugsweise dasjenige Inertialsystem benutzen, in dem der Schwerpunkt ruht. Dieses Schwerpunktsystem wird in Abschnitt 10.4 eingeführt.

10.3 Gesamtdrehimpuls

Den Gesamtdrehimpuls definieren wir als die Summe der Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \,. \tag{10.16}$$

So wie der einzelne Drehimpuls hängt auch der Gesamtdrehimpuls des Systems von der Wahl des Koordinatensystems ab. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.8 leiten wir den Gesamtdrehimpulssatz ab, indem wir die Newtonsche Grundgleichung (10.1) vektoriell mit $\vec{r}_i$ multiplizieren und über alle Massenpunkte aufsummieren:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \quad &= \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \overset{(10.16)}{=} \frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &\overset{(10.7)}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \,. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Wir untersuchen den Term in (10.17), der das Drehmoment der inneren Kräfte beinhaltet. Durch Umbenennung der Summationsindizes, Vertauschung der Summationsreihenfolge und Anwendung des dritten Newtonschen Axioms (10.2) folgt

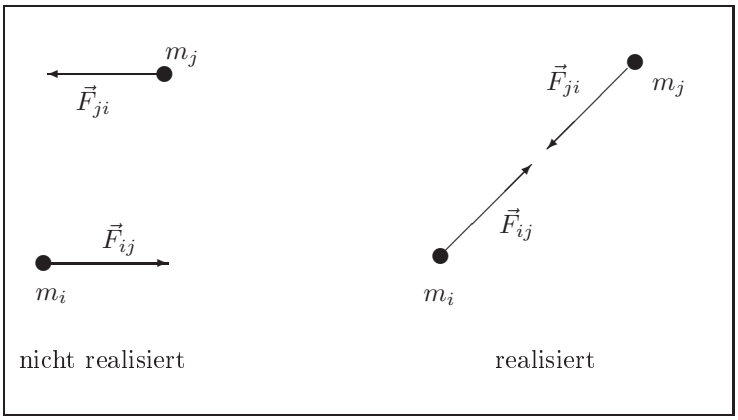
$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \overset{(10.2)}{=} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \,. \tag{10.18}$$

Hieraus folgern wir

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \,. \tag{10.19}$$

Wir müssen die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ durch die weitere Annahme einschränken, daß sie nur in Richtung der Verbindungslinien wirken:

$$\vec{F}_{ij} = A_{ij} \, (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,, \quad A_{ij} = A_{ji} \,. \tag{10.20}$$



Falls diese Einschränkung nicht gelten würde, könnte sich beispielsweise ein abgeschlossenes Systems aus zwei Teilchen mit einer starren Achse von selbst in immer schnellere Drehung versetzen. Dies würde allen Beobachtungen widersprechen. Die Einschränkung (10.20) ist beispielsweise bei konservativen inneren Kräften (10.3) erfüllt, bei denen das Potential die über (10.4) hinausgehende Eigenschaft

$$U_{ij}\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = U_{ij}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right) = U_{ji}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right) \tag{10.21}$$

besitzt. Einsetzen von (10.21) in (10.3) führt nämlich auf (10.20) mit

$$A_{ij} = -\frac{U'_{ij}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\,. \tag{10.22}$$

Aufgrund der Einschränkung (10.20) führen die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ zu keinem Drehmoment:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \overset{(10.19),(10.20)}{=} \vec{0}\,. \tag{10.23}$$

Demnach folgt aus (10.17) und (10.23) der Gesamtdrehimpulssatz

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}^{(a)}\,. \tag{10.24}$$

Er besagt, daß die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses $\vec{L}$ durch das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte

$$\vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \tag{10.25}$$

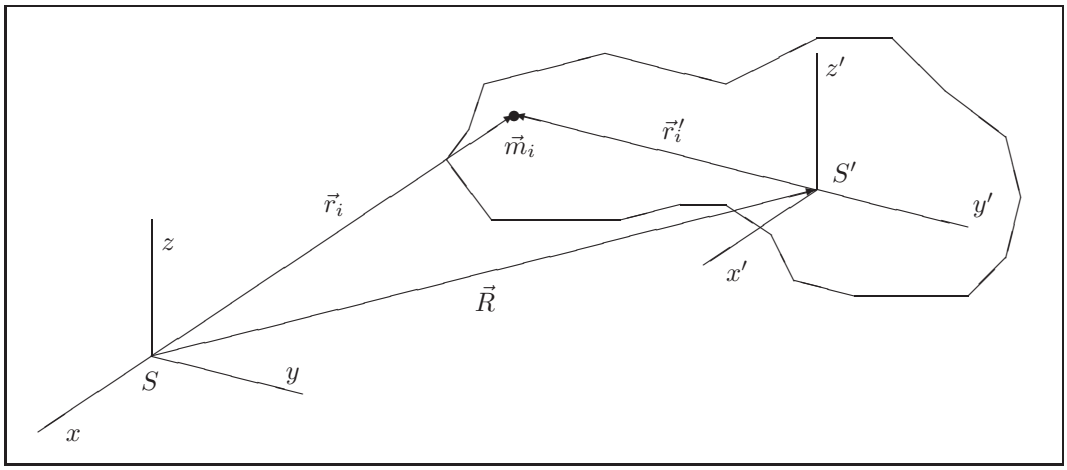
gegeben ist. In einem abgeschlossenen System verschwinden die äußeren Kräfte und damit auch das von ihnen verursachte Gesamtdrehmoment:

$$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{0} \quad \overset{(10.25)}{\Longrightarrow} \quad \vec{M}^{(a)} = \vec{0}\,. \tag{10.26}$$

Dann bleibt der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ des Systems nach (10.24) erhalten.

10.4 Schwerpunktsystem

Wir gehen nun vom ursprünglichen Koordinatensystem S zu einem dazu achsenparallelen neuen Koordinatensystem S' über, das im bewegten Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten verankert ist:



Die Ortsvektoren $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_i'$ der Masse m_i im Koordinatensystem S und S' unterscheiden sich dann durch den Vektor $\vec{R}$, der vom Ursprung von S zum Ursprung von S' zeigt:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \,. \tag{10.27}$$

Aus der Definition des Schwerpunktes folgt dann tatsächlich, daß der Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten mit dem Ursprung des neuen Koordinatensystems S' zusammenfällt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \overset{(10.27)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \vec{R} \sum_{i=1}^{N} m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \overset{(10.8),(10.9)}{=} \vec{0} \,. \tag{10.28}$$

Differenzieren wir (10.28) nach der Zeit, so lesen wir ab, daß der Gesamtimpuls des Schwerpunktes im neuen Koordinatensystem S' verschwindet:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i' = \vec{0} \,. \tag{10.29}$$

Wir untersuchen nun die Auswirkungen der Koordinatentransformation (10.27) auf den Gesamtdrehimpuls (10.16):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times (\dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{R}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' + \vec{r}_i' \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i' + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}) \,. \tag{10.30}$$

Aufgrund von (10.28) und (10.29) erhalten wir die Zerlegung

$$\vec{L} \;=\; \vec{L}' + \vec{L}_S \,. \tag{10.31}$$

Demnach zerfällt der Gesamtdrehimpuls (10.16) im ursprünglichen Koordinatensystem S in den Gesamtdrehimpuls im neuen Koordinatensystem S'

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' \tag{10.32}$$

und den Drehimpuls des Schwerpunktes bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems S

$$\vec{L}_S = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \,. \tag{10.33}$$

Eine entsprechende Zerlegung erhält man auch für das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte:

$$\vec{M}^{(a)} \overset{(10.25),(10.27)}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} = \vec{M}'^{(a)} + \vec{M}_S^{(a)} \,. \tag{10.34}$$

Das Gesamtdrehmoment (10.25) im ursprünglichen Koordinatensystem S zerfällt in das Gesamtdrehmoment im neuen Koordinatensystem S'

$$\vec{M}'^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(a)} \tag{10.35}$$

und in das Drehmoment der am Schwerpunkt angreifenden äußeren Kräfte bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems S

$$\vec{M}_S^{(a)} = \vec{R} \times \vec{F}^{(a)} \,. \tag{10.36}$$

Aus dem Gesamtdrehimpulssatz (10.24) im ursprünglichen Koordinatensystem S und den Zerlegungen (10.31), (10.34) folgt zunächst

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}'^{(a)} + \vec{M}_S^{(a)} \,. \tag{10.37}$$

Aufgrund der Bewegungsgleichung des Schwerpunktes gilt nun

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} \overset{(10.33)}{=} M\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} \overset{(10.12)}{=} \vec{R} \times \vec{F}^{(a)} \overset{(10.36)}{=} \vec{M}_S^{(a)} \,. \tag{10.38}$$

Aus (10.37) und (10.38) lesen wir dann ab, daß der Gesamtdrehimpulssatz auch im neuen Koordinatensystem S' gültig ist:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(a)} \,. \tag{10.39}$$

Dieses Ergebnis bildet den Ausgangspunkt für die spätere Behandlung des starren Körpers.

10.5 Gesamtenergie

Wir gehen nun wieder in das ursprüngliche Koordinatensystem S und leiten analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.5 den Gesamtenergieerhaltungssatz her. Hierzu multiplizieren wir die Newtonsche Grundgleichung (10.1) skalar mit $\dot{\vec{r}}_i$ und summieren über alle Massenpunkte:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \overset{(10.7)}{=} \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} \,. \tag{10.40}$$

Die linke Seite ist die zeitliche Änderung der kinetischen Gesamtenergie

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \,, \tag{10.41}$$

während die rechte Seite die von den äußeren und inneren Kräften aufgebrachte Leistung darstellt. Wir nehmen nun an, daß sowohl die äußeren Kräfte $\vec{F}_i^{(a)}$ als auch die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ konservativ sind und daher aus Potentialfeldern herleitbar sind. Unter Berücksichtigung von (10.3) und (10.21) gilt dann

$$\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i^{(a)} (\vec{r}_i) \,, \tag{10.42}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \,. \tag{10.43}$$

Werden diese Potentialfelder entlang der Bahnkurve $\vec{r}_i(t)$ ausgewertet, so führt die Kettenregel auf

$$\frac{d}{dt}U_i^{(a)}\left(\vec{r}_i(t)\right) = \dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{\nabla}_i U_i^{(a)}\left(\vec{r}_i(t)\right) \overset{(10.42)}{=} -\dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{F}_i^{(a)} \tag{10.44}$$

und entsprechend auf

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_{ij}\left(|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)|\right) &= \dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{\nabla}_i U_{ij}\left(|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)|\right) + \dot{\vec{r}}_j(t)\cdot\vec{\nabla}_j U_{ij}\left(|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)|\right)\\ &\overset{(10.43)}{=} -\dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{F}_{ij} - \dot{\vec{r}}_j(t)\cdot\vec{F}_{ji}\,.\end{aligned} \tag{10.45}$$

Summieren wir in (10.44) über den Index i, so gilt

$$\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{F}_i^{(a)} = -\frac{d}{dt}\,U^{(a)}\left(\vec{r}_1(t),\ldots,\vec{r}_N(t)\right) \tag{10.46}$$

mit dem Potential der äußeren Kräfte

$$U^{(a)}\left(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N\right) = \sum_{i=1}^{N}U_i^{(a)}\left(\vec{r}_i\right)\,. \tag{10.47}$$

Entsprechend folgt aus (10.45) durch Summation über alle i und j

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{F}_{ij}+\dot{\vec{r}}_j\cdot\vec{F}_{ji}) = -\frac{d}{dt}\,U\left(\vec{r}_1(t),\ldots,\vec{r}_N(t)\right) \tag{10.48}$$

mit dem Potential der inneren Kräfte

$$U\left(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}U_{ij}\left(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|\right)\,. \tag{10.49}$$

Einsetzen von (10.41), (10.46) und (10.48) in (10.40) führt auf den Gesamtenergieerhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}(T+U^{(a)}+U) = 0 \quad\Rightarrow\quad T+U^{(a)}+U = E = \text{konstant} \tag{10.50}$$

mit der Gesamtenergie E. Die Potentiale (10.47) und (10.49) der äußeren und inneren Kräfte lassen sich auch zur Formulierung der Newtonschen Grundgleichung (10.1) heranziehen. Deren Gradienten ergeben nämlich

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_i U^{(a)} &\overset{(10.47)}{=} \vec{\nabla}_i U_i^{(a)} \overset{(10.42)}{=} -\vec{F}_i^{(a)},\\ \vec{\nabla}_i U &\overset{(10.49)}{=} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{\nabla}_i U_{ij}\left(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|\right) \overset{(10.43)}{=} -\vec{F}_{ij}\,,\end{aligned}$$

so daß man aus (10.1) und (10.7) abliest

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i(U^{(a)}+U)\,. \tag{10.51}$$

Liegen keine äußeren Kräfte vor

$$U^{(a)}\left(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N\right) = 0\,, \tag{10.52}$$

so vereinfacht sich die Newtonsche Grundgleichung (10.51) zu

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i U\,. \tag{10.53}$$

Kapitel 11

Harmonische Schwingungen von Massenpunkten

Wir behandeln nun ein System von N Massenpunkten, die kleine Auslenkungen um ihre Ruhelage ausführen. Wir zeigen, daß ein solches System zu Eigenschwingungen fähig ist, bei denen alle N Massenpunkte mit ein- und derselben Eigenfrequenz schwingen.

11.1 Notation

Wir führen zunächst eine kompakte Notation zur Beschreibung eines Systems von N Massenpunkten ein. Um eine Doppelindizierung für die Komponenten der Ortsvektoren der Massenpunkten zu vermeiden, werden diese zu einem $3N$-dimensionalen Vektor zusammengefaßt:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{3N-2} \\ X_{3N-1} \\ X_{3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ \vdots \\ r_{Nx} \\ r_{Ny} \\ r_{Nz} \end{pmatrix} . \tag{11.1}$$

Damit wird das Potential der inneren Kräfte zu einer Funktion dieses $3N$-dimensionalen Vektors:

$$U = U(\vec{X}) . \tag{11.2}$$

Führt man noch die $3N \times 3N$-Massenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & m_1 & 0 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & m_1 & & & & & \\ & & & \ddots & m_N & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & m_N & 0 \\ & & & & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

ein, so lassen sich die Newtonschen Grundgleichungen (10.53) für die N Massenpunkte zusammenfassen zu

$$M\ddot{\vec{X}} = -\vec{\nabla} U(\vec{X}) , \tag{11.4}$$

wobei auf der rechten Seite ein $3N$-dimensionaler Gradient auftritt:

$$\vec{\nabla} U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_{3N}} \end{pmatrix} . \tag{11.5}$$

11.2 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage

Wir nehmen nun an, daß die inneren Kräfte so beschaffen sind, daß die Massenpunkte eine Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$ besitzen. Dann verschwinden die inneren Kräfte in dieser Ruhelage, d.h. es gilt

$$\left.\frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k}\right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} = 0\,; \quad k = 1, \ldots, 3N\,. \tag{11.6}$$

Wir untersuchen nun kleine Auslenkungen $\vec{x}$ aus dieser Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$:

$$\vec{X}(\vec{x}) = \vec{X}^{(0)} + \vec{x}\,. \tag{11.7}$$

Setzt man die Zerlegung (11.7) in das Potential (11.2) der inneren Kräfte ein

$$U = U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x})\,, \tag{11.8}$$

so kann man eine Taylor-Entwicklung in den kleinen Auslenkungen $\vec{x}$ durchführen. Hierzu verallgemeinert man die Taylor-Entwicklung einer Variablen

$$U(X^{(0)} + x) = U(X^{(0)}) + \left.\frac{\partial U(X)}{\partial X}\right|_{X=X^{(0)}} x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial U^2(X)}{\partial X^2}\right|_{X=X^{(0)}} x^2 + \cdots \tag{11.9}$$

auf mehrere Variablen

$$U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x}) = U(\vec{X}^{(0)}) + \sum_{k=1}^{3N} \left.\frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k}\right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \left.\frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l}\right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} x_k x_l + \ldots\,. \tag{11.10}$$

Für kleine Auslenkungen ist es ausreichend, die Taylor-Entwicklung schon nach der zweiten Ordnung abzubrechen. Berücksichtigt man außerdem noch die Bedingung (11.6) für die Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$, so vereinfacht sich (11.10) zu

$$U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x}) = U(\vec{X}^{(0)}) + \frac{1}{2} \vec{x}^{\mathsf{T}} U x\,, \tag{11.11}$$

wobei die $3N \times 3N$-Matrix

$$U_{kl} = \left.\frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l}\right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} \tag{11.12}$$

eingeführt wurde. Da wir nach dem Satz von Schwarz annehmen, daß die zweiten partiellen Ableitungen des Potentials nach den inneren Kräften vertauschen

$$\frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l} = \frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_l \partial X_k}\,, \tag{11.13}$$

ist die Matrix U symmetrisch

$$U = U^{\mathsf{T}}\,. \tag{11.14}$$

Da wir ferner annehmen, daß die Ruhelage der Massenpunkte ein Minimum darstellt, muß die Matrix U positiv definit sein, d.h. es gilt

$$\vec{x}^{\mathsf{T}} U \vec{x} \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{x}\,. \tag{11.15}$$

Der Gradient des Potentials der inneren Kräfte ergibt dann

$$\frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k} \overset{(11.8)}{=} \frac{\partial U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x})}{\partial x_k} \overset{(11.11)}{=} (U\vec{x})_k\,, \tag{11.16}$$

so daß die Bewegungsgleichungen (11.4) übergeht in

$$M\ddot{\vec{x}}(t) = -U\vec{x}(t)\,. \tag{11.17}$$

Es handelt sich demnach um ein System von $3N$ gekoppelten harmonischen Oszillatoren.

11.3 Koordinatentransformationen

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (11.17) führen wir eine Koordinatentransformation durch

$$\vec{x}(t) = M^{-1/2}\vec{y}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}(t) = M^{1/2}\vec{x}(t)\,, \tag{11.18}$$

wobei die Wurzel der Massenmatrix (11.3) definiert ist durch

$$M^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \sqrt{m_1} & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{m_1} & & & & \\ & & & \ddots & \sqrt{m_N} & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & \sqrt{m_N} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{m_N} \end{pmatrix}, \tag{11.19}$$

und entsprechend lautet deren Inverse

$$M^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m_1}} & & & & \\ & & & \ddots & \frac{1}{\sqrt{m_N}} & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{m_N}} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m_N}} \end{pmatrix}. \tag{11.20}$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (11.17) zu

$$\ddot{\vec{y}} = -V\vec{y}(t) \tag{11.21}$$

mit der neu eingeführten Matrix

$$V = M^{-1/2} U M^{-1/2}\,. \tag{11.22}$$

Mit den Matrizen $M^{-1/2}$ und U ist auch die Matrix V symmetrisch:

$$V^{\mathsf{T}} \overset{(11.22)}{=} (M^{-1/2})^{\mathsf{T}} U^{\mathsf{T}} (M^{-1/2})^{\mathsf{T}} \overset{(11.14),(11.20)}{=} M^{-1/2} U M^{-1/2} \overset{(11.22)}{=} V\,. \tag{11.23}$$

Außerdem folgt aus der positiven Definitheit der Matrix U in (11.15) und der Koordinatentransformation (11.18), daß auch die Matrix V positiv definit ist:

$$\vec{y}^{\mathsf{T}} V \vec{y} \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{y}\,. \tag{11.24}$$

11.4 Eigenvektoren und Eigenfrequenzen

Die Fundamentallösungen von (11.21) sind die Eigenschwingungen

$$\vec{y}_k(t) = \vec{y}_k e^{\pm i\omega_k t}\,, \tag{11.25}$$

bei denen alle Komponenten von $\vec{y}(t)$ mit derselben Frequenz ω_k, der sogenannten Eigenfrequenz, schwingen. Einsetzen von (11.25) in (11.21) führt auf

$$V\vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_k\,. \tag{11.26}$$

Demnach sind die Amplituden $\vec{y}_k$ der Eigenschwingungen die Eigenvektoren und die Quadrate der Eigenfrequenzen ω_k die Eigenwerte der Matrix V. Das homogene lineare Gleichungssystem (11.26) besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet

$$\det(V - \omega_k^2 I) = 0\,. \tag{11.27}$$

Diese Bestimmungsgleichung für ω_k^2 besagt, daß die Quadrate der Eigenfrequenzen ω_k Nullstellen eines Polynomes der Ordnung $3N$ sind. Nach dem Gaußschen Hauptsatz der Algebra gibt es genau $3N$ Lösungen ω_k^2 mit $k = 1, 2, \ldots, 3N$, wobei Mehrfachwurzeln entsprechend mehrfach gezählt werden. Dabei führen die Eigenschaften (11.23) und (11.24) dazu, daß sich für die Eigenwerte ω_k gewisse Aussagen ableiten lassen. Geht man in (11.26) zum konjugiert Komplexen und Transponierten über, so gilt

$$V\vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_k \quad \overset{(11.23)}{\Longrightarrow} \quad \vec{y}_k^{*\mathsf{T}} V = \omega_k^{*2} \vec{y}_k^{*\mathsf{T}}\,. \tag{11.28}$$

Außerdem folgt

$$\vec{y}_k^{*\mathsf{T}} V \vec{y}_k \overset{(11.26)}{=} \omega_k^2 \vec{y}_k^{*\mathsf{T}} \vec{y}_k \overset{(11.28)}{=} \omega_k^{*2} \vec{y}_k^{*\mathsf{T}} \vec{y}_k\,, \tag{11.29}$$

so daß wir wegen $\vec{y}_k \neq \vec{0}$ schließen können, daß die Quadrate der Eigenwerte ω_k reell sind:

$$\omega_k^2 = \omega_k^{*2}\,. \tag{11.30}$$

Ferner bewirkt die positive Definitheit (11.24) von V zusammen mit (11.26)

$$\omega_k^2 \geq 0\,, \tag{11.31}$$

so daß auch die Eigenwerte ω_k reell sind. Zu jedem reellen Eigenwert ω_k^2 der Matrix V erhält man durch Lösung von (11.26) einen reellen Eigenvektor $\vec{y}_k$. Tritt ein Eigenwert ω_k gerade g_k-fach auf, dann gibt es genau g_k verschiedene, linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{y}_k$ bei der Lösung von (11.26). Man bezeichnet g_k als den Entartungsgrad von ω_k.

Wir untersuchen nun das Eigenwertproblem (11.26) für zwei verschiedene Eigenwerte $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$:

$$V\vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{y}_l^{\mathsf{T}} V \vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_l^{\mathsf{T}} \vec{y}_k\,, \tag{11.32}$$

$$V\vec{y}_l = \omega_l^2 \vec{y}_l \quad \Rightarrow \quad \vec{y}_k^{\mathsf{T}} V \vec{y}_l = \omega_l^2 \vec{y}_k^{\mathsf{T}} \vec{y}_l\,. \tag{11.33}$$

Berücksichtigt man die Eigenschaften der Skalarprodukte

$$\vec{y}_k^{\mathsf{T}} \vec{y}_l = (\vec{y}_k^{\mathsf{T}} \vec{y}_l)^{\mathsf{T}} = \vec{y}_l^{\mathsf{T}} \vec{y}_k \tag{11.34}$$

und

$$\vec{y}_k^{\mathsf{T}} V \vec{y}_l = (\vec{y}_k^{\mathsf{T}} V \vec{y}_l)^{\mathsf{T}} = \vec{y}_l^{\mathsf{T}} V^{\mathsf{T}} \vec{y}_k \overset{(11.23)}{=} \vec{y}_l^{\mathsf{T}} V \vec{y}_k\,, \tag{11.35}$$

so folgt aus (11.32) und (11.33)

$$(\omega_k^2 - \omega_l^2)\vec{y}_l^{\mathsf{T}}\vec{y}_k = 0 \quad \overset{\omega_k \neq \omega_l}{\Longrightarrow} \quad \vec{y}_l^{\mathsf{T}}\vec{y}_k = 0\,. \tag{11.36}$$

Demnach sind die Eigenvektoren $\vec{y}_k, \vec{y}_l$ zu verschiedenen Eigenwerten $\omega_k \neq \omega_l$ orthogonal zueinander. Innerhalb eines g_k-fach entarteten Eigenraumes kann man die Eigenvektoren mit Hilfe des Schmidtschen Verfahrens orthogonalisieren. Eine anschließende Normierung führt dazu, daß die Eigenvektoren $\vec{y}_k$ ein VNOS, d.h. ein vollständig normiertes Orthogonalsystem bilden:

$$\vec{y}_k^{\mathsf{T}}\vec{y}_l = \delta_{kl}\,. \tag{11.37}$$

Wir machen nun die Koordinatentransformation (11.18) wieder rückgängig und untersuchen, wie sich die erzielten Ergebnisse für die transformierten Koordinaten $\vec{y}$ auf die ursprünglichen Koordinaten $\vec{x}$ auswirken. Die Fundamentallösungen (11.25) von (11.21) gehen mit Hilfe von (11.18) über in die Fundamentallösungen von (11.17)

$$\vec{x}_k(t) = \vec{x}_k e^{\pm i\omega_k t}\,, \tag{11.38}$$

wobei die Amplitude gegeben ist durch

$$\vec{x}_k = M^{-1/2}\vec{y}_k\,. \tag{11.39}$$

Außerdem geht das Eigenwertproblem (11.26) über in

$$W\vec{x}_k = \omega_k^2\vec{x}_k\,, \tag{11.40}$$

wobei die neu eingeführte Matrix

$$W = M^{-1}U \tag{11.41}$$

im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Sind ω_k^2 und $\vec{y}_k$ Eigenwert und Eigenvektor der Matrix V, so sind ω_k^2 und $\vec{x}_k = M^{-1/2}\vec{y}_k$ Eigenwert und Eigenvektor der Matrix W. Die Orthonormalitätsrelation (11.37) der Eigenvektoren $\vec{y}_k$ geht dabei über in

$$\vec{x}_k^{\mathsf{T}}M\vec{x}_l = \delta_{kl}\,. \tag{11.42}$$

Demnach sind die Eigenvektoren $\vec{x}_k$ von W bezüglich der Massenmatrix M orthonormiert.

11.5 Einarbeiten der Anfangsbedingungen

Nun konstruieren wir durch Linearkombination der Fundamentallösungen (11.38) die allgemeine Lösung von (11.17)

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(a_k^{(1)} e^{i\omega_k t} + a_k^{(2)} e^{-i\omega_k t}\right)\,. \tag{11.43}$$

Die Anwendung der Eulerschen Formel (4.11) ergibt dann

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(b_k^{(1)} \cos\omega_k t + b_k^{(2)} \sin\omega_k t\right) \tag{11.44}$$

mit den Koeffizienten

$$b_k^{(1)} = a_k^{(1)} + a_k^{(2)}\,, \quad b_k^{(2)} = i(a_k^{(1)} - a_k^{(2)})\,. \tag{11.45}$$

Die noch unbekannten Koeffizienten $b_k^{(1)}, b_k^{(2)}$ lassen sich durch die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) \quad \overset{(11.44)}{=} \quad \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k b_k^{(1)}\,, \tag{11.46}$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{x}}(0) \quad \overset{(11.44)}{=} \quad \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k b_k^{(2)} \omega_k \tag{11.47}$$

festlegen. Multipliziert man (11.46) und (11.47) mit $\vec{x}_l^{\mathsf{T}} M$, so folgt unter der Berücksichtigung der Orthonormalitätsrelation (11.42)

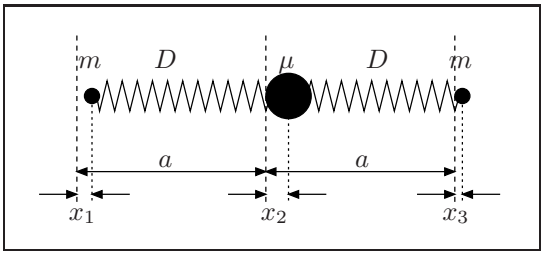
$$b_k^{(1)} = \vec{x}_k^{\mathsf{T}} M \vec{x}_0 \,, \quad b_k^{(2)} = \frac{\vec{x}_k^{\mathsf{T}} M \dot{\vec{x}}_0}{\omega_k} \,. \tag{11.48}$$

Damit lautet die Lösung (11.44) von (11.17):

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(\vec{x}_k^{\mathsf{T}} M \vec{x}_0 \cos \omega_k t + \frac{\vec{x}_k^{\mathsf{T}} M \dot{\vec{x}}_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \,. \tag{11.49}$$

11.6 Dreiatomiges Molekül

Als Beispiel untersuchen wir ein Molekül, das aus drei Atomen der Massen $m_1 = m, m_2 = \mu, m_3 = m$ besteht, und bei dem sich die drei Atome nur längs einer Achse bewegen können. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage lassen sich die Rückstellkräfte durch Federn mit der Federkonstanten D modellieren:



Die Auslenkungen $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ der drei Massen aus der Gleichgewichtslage genügen den Newtonschen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{12} = D(x_2 - x_1), \\ \mu\ddot{x}_2 &= F_{21} + F_{23} = -D(x_2 - x_1) + D(x_3 - x_2) \,, \\ m\ddot{x}_3 &= F_{32} = -D(x_3 - x_2) \,. \end{aligned} \tag{11.50}$$

Sie sind demnach von der Form (11.17), wobei die Matrizen M und U die folgende explizite Gestalt besitzen:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad U = D \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \,. \tag{11.51}$$

Die Invertierung der Massenmatrix M führt analog zu (11.19) und (11.20) auf

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \,, \tag{11.52}$$

so daß sich die Matrix W ergibt zu

$$W \overset{(11.41)}{=} M^{-1} U \overset{(11.51),(11.52)}{=} \begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & 2\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix} \,. \tag{11.53}$$

Wir bemerken, daß die Matrix W im Fall $m \neq \mu$ nicht symmetrisch ist. Das charakteristische Polynom der Matrix W lautet:

$$\begin{aligned}\det(W-\omega^2 I) &\overset{(11.53)}{=} \left|\begin{pmatrix} \frac{D}{m}-\omega^2 & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & 2\frac{D}{\mu}-\omega^2 & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m}-\omega^2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \omega^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)\left(\omega^2-2\frac{D}{\mu}-\frac{D}{m}\right). \end{aligned} \tag{11.54}$$

Die Nullstellen dieser Gleichung führen uns auf die folgenden Eigenfrequenzen des Moleküls:

$$\omega_1 = 0 < \omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m}} < \omega_3 = \sqrt{\frac{D}{m}+2\frac{D}{\mu}}. \tag{11.55}$$

Die dazugehörigen unnormierten Eigenvektoren ergeben sich durch Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (11.40) unter Verwendung von (11.53) und (11.55):

$$(W-\omega_1^2 I)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & 2\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix}\vec{x}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11.56}$$

$$(W-\omega_2^2 I)\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & 2\frac{D}{\mu}-\frac{D}{m} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix}\vec{x}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_2 = N_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{11.57}$$

$$(W-\omega_3^2 I)\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{m} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & -2\frac{D}{\mu} \end{pmatrix}\vec{x}_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = N_3\begin{pmatrix} \mu \\ -2m \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{11.58}$$

Entsprechend (11.42) sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten tatsächlich orthogonal zueinander:

$$\vec{x}_2^{\mathsf{T}} M\vec{x}_1 = N_1N_2(1,0,-1)\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0, \tag{11.59}$$

$$\vec{x}_3^{\mathsf{T}} M\vec{x}_1 = N_1N_3(\mu,-2m,\mu)\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0, \tag{11.60}$$

$$\vec{x}_3^{\mathsf{T}} M\vec{x}_2 = N_2N_3(\mu,-2m,\mu)\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv 0. \tag{11.61}$$

Die Bedingungen für die Normierung der Eigenvektoren lauten

$$\vec{x}_1^{\mathsf{T}} M \vec{x}_1 = N_1^2 (1,1,1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \,, \tag{11.62}$$

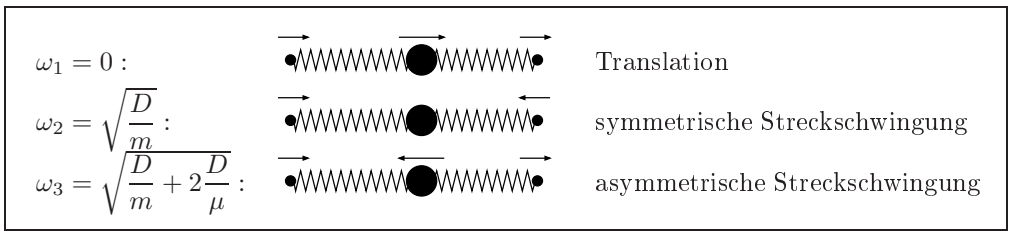
$$\vec{x}_2^{\mathsf{T}} M \vec{x}_2 = N_2^2 (1,0,-1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv 1 \,, \tag{11.63}$$

$$\vec{x}_3^{\mathsf{T}} M \vec{x}_3 = N_3^2 (\mu,-2m,\mu) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ -2m \\ \mu \end{pmatrix} \equiv 1 \,, \tag{11.64}$$

so daß sich die Normierungskonstanten ergeben zu:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu + 2m}} \,, \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \,, \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{2m\mu(\mu + 2m)}} \,. \tag{11.65}$$

Die Eigenvektoren des dreiatomigen Moleküls lassen sich graphisch veranschaulichen:



Damit ist die Lösung von (11.50) durch (11.49), (11.55)–(11.58) und (11.62)–(11.64) gegeben. In der 15. Übungsaufgabe untersuchen wir als weiteres Beispiel die Eigenschwingungen eines vieratomigen Moleküls in einer Ebene.

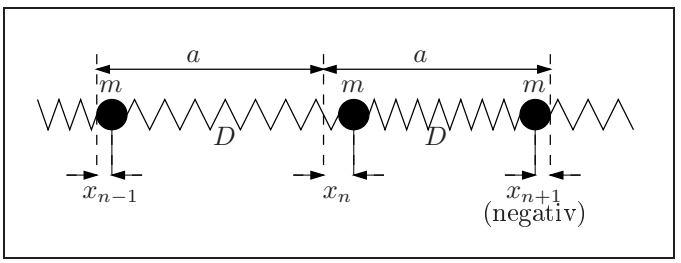
Kapitel 12

Lineare Kette und eingespannte Saite

Wir untersuchen nun die Eigenschwingungen einer linearen Kette, die ein Modell für einen unendlich ausgedehnten eindimensionalen Kristall darstellt. Im Grenzübergang, daß immer mehr Massenpunkte dichter zusammenrücken, geht die lineare Kette in eine Saite über. Wir diskutieren unter anderem, wie das Anfangs- und Randwertproblem für eine eingespannte Saite gelöst wird.

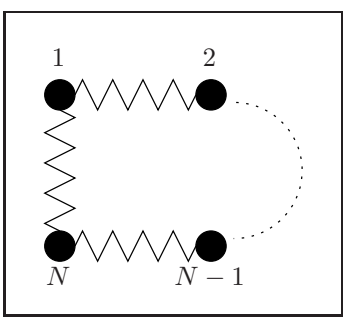
12.1 Problemstellung

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten der Masse m, die in einer eindimensionalen Kette jeweils im Abstand a angeordnet sind. Dabei seien benachbarte Massen über elastische Federn der Federkonstanten D miteinander verbunden. Im folgenden untersuchen wir nur die longitudinalen Auslenkungen $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ der Massenpunkte aus der Ruhelage:



Wir wollen die endliche Kette als ein Modell für einen unendlich ausgedehnten eindimensionalen Kristall verwenden und setzen deshalb periodische Randbedingungen voraus:

$$x_{N+n}(t) = x_n(t)\,; \quad n = 1, \ldots, N. \tag{12.1}$$



Auf den n-ten Massenpunkt wirken also zwei Kräfte:

$$F_n = F_{n,n+1} + F_{n,n-1}\,. \tag{12.2}$$

Die eine Hooksche Kraft wird vom $(n+1)$-ten Massenpunkt ausgeübt

$$F_{n,n+1} = D(x_{n+1} - x_n)\,, \tag{12.3}$$

während die andere vom $(n-1)$-ten Massenpunkt ausgeht

$$F_{n,n-1} = -D(x_n - x_{n-1})\,. \tag{12.4}$$

Demnach lauten die resultierenden Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_n = \frac{F_n}{m} \overset{(12.2)-(12.4)}{=} \omega_0^2(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})\,, \tag{12.5}$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz einer einzelnen Feder darstellt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}\,. \tag{12.6}$$

Diese gekoppelten Bewegungsgleichungen (12.5) sind nun unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingung (12.1) zu lösen.

12.2 Basisfunktionen

Aufgrund der periodischen Randbedingung (12.1) lassen sich die Auslenkungen einer diskreten Fourier-Transformation unterziehen:

$$x_n(t) = \sum_k a_k(t) x_n^{(k)}\,, \tag{12.7}$$

wobei die Basisfunktionen gegeben sind durch

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikna}\,. \tag{12.8}$$

Die periodischen Randbedingungen (12.1) sind dann erfüllt, wenn gilt

$$e^{ikNa} = 1\,. \tag{12.9}$$

Auch wenn diese Gleichung gelöst wird durch

$$k = \frac{2\pi}{Na} l \tag{12.10}$$

mit $l \in \mathbb{Z}$, so gibt es nur N verschiedene k-Werte, die zu unterschiedlichen Basisfunktionen (12.8) führen. Üblicherweise wählt man für ungerade N die Einschränkung

$$-\frac{N-1}{2} \le l \le \frac{N-1}{2}\,, \tag{12.11}$$

so daß nur k-Werte der ersten Brillouin-Zone

$$-\frac{\pi}{a} < k < +\frac{\pi}{a} \tag{12.12}$$

auftreten. Wir zeigen, daß die Basisfunktionen $x_n^{(k)}$ aufgrund der geometrischen Summe

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \tag{12.13}$$

der Orthonormalitätsrelation genügen:

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^{(k)*} x_n^{(k')} \overset{(12.8),(12.10)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} e^{i2\pi(l'-l)n/N} \overset{(12.13)}{=} \frac{e^{i2\pi(l'-l)/N} - e^{i2\pi(l'-l)(N+1)/N}}{N\left[1 - e^{i2\pi(l'-l)/N}\right]}$$
$$= \frac{1 - e^{i2\pi(l'-l)}}{N\left[e^{-i2\pi(l'-l)/N} - 1\right]} = \delta_{l,l'} \overset{(12.10)}{=} \delta_{k,k'} \,. \tag{12.14}$$

Entsprechend zeigen wir, daß die Basisfunktionen (12.8) mit (12.10) auch der Vollständigkeitsrelation genügen:

$$\sum_{k} x_n^{(k)*} x_{n'}^{(k)} = \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{1}{N} e^{i2\pi(n'-n)l/N}$$
$$\overset{l':=l+(N+1)/2}{=} e^{-i2\pi(n'-n)(N+1)/(2N)} \sum_{l'=1}^{N} \frac{1}{N} e^{i2\pi(n'-n)l'/N}$$
$$\overset{(12.14)}{=} \delta_{n',n} \,. \tag{12.15}$$

12.3 Eigenfrequenzen

Wir setzen nun den Ansatz (12.7) unter Beachtung der Eigenschaft der Basisfunktionen

$$x_{n\pm1}^{(k)} \overset{(12.8)}{=} e^{\pm ika} x_n^{(k)} \tag{12.16}$$

in die gekoppelten Bewegungsgleichungen (12.5) ein:

$$\sum_{k} \ddot{a}_k(t) x_n^{(k)} = \omega_0^2 \sum_{k} \left(e^{ika} - 2 + e^{-ika}\right) a_k(t) x_n^{(k)} \,. \tag{12.17}$$

Multipliziert man (12.17) mit $x_n^{(k')}$ und summiert man über alle $n = 1, \ldots, N$, so erhält man aufgrund der Orthonormalitätsrelation (12.14) für die Amplituden $a_k(t)$ die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators

$$\ddot{a}_k(t) + \omega_k^2 a_k(t) = 0 \tag{12.18}$$

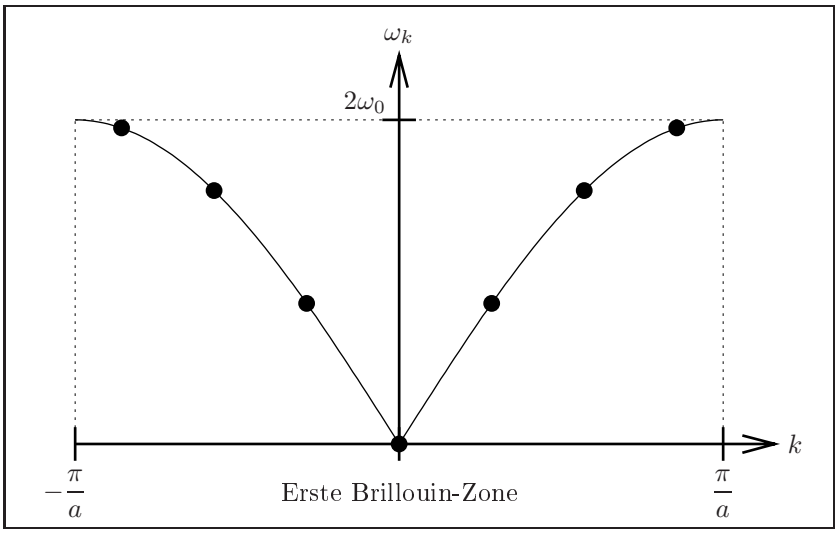
mit der Frequenz

$$\omega_k^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_k = 2\omega_0 \left|\sin \frac{ka}{2}\right| \,. \tag{12.19}$$

Wegen (12.10) und (12.11) tritt immer die Frequenz $\omega = 0$ auf, da man die lineare Kette als ganzes verschieben kann. Außerdem ist aufgrund von (12.10) und (12.11) die Anzahl der unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit der Anzahl N der Massenpunkte identisch. Da der Betrag des Sinus eine achsensymmetrische Funktion ist, ist die Dispersionsrelation als ganzes symmetrisch:

$$\omega_k \overset{(12.19)}{=} \omega_{-k} \,. \tag{12.20}$$

Wir illustrieren die Dispersionsrelation (12.19) unter Berücksichtigung von (12.10) und (12.11) für eine lineare Kette mit $N = 7$ Massenpunkten:



Bei einem eindimensionalen Festkörper mit $N \approx 10^{23}$ Massenpunkten liegen die erlaubten k-Werte gemäß (12.10) beliebig dicht. In der 16. Übungsaufgabe untersuchen wir, wie sich die Dispersionsrelation (12.19) der linearen Kette beim Übergang zur linearen zweiatomigen Kette verändert.

12.4 Ebene Wellen

Die allgemeine Lösung von (12.18) lautet

$$a_k(t) = b_k^{(1)} e^{-i\omega_k t} + b_k^{(2)} e^{+i\omega k t} \,. \tag{12.21}$$

Damit die Auslenkungen

$$x_n(t) \overset{(12.7),(12.8)}{=} \sum_k a_k(t) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikan} \tag{12.22}$$

mit ihrem konjugiert Komplexen

$$x_n^*(t) \overset{(12.22)}{=} \sum_k a_k^*(t) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ikan} \overset{k':=-k}{=} \sum_{k'} a_{-k'}^*(t) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik'na} \tag{12.23}$$

übereinstimmen und somit reell sind, muß gelten:

$$x_n(t) = x_n^*(t) \quad \overset{(12.22),(12.23)}{\Longrightarrow} \quad a_k(t) = a_{-k}^*(t) \,. \tag{12.24}$$

Setzt man (12.21) unter Beachtung der Symmetrie der Dispersionsrelation (12.20) in (12.24) ein, so folgt die Einschränkung

$$b_k^{(2)} = b_{-k}^{(1)*} \,. \tag{12.25}$$

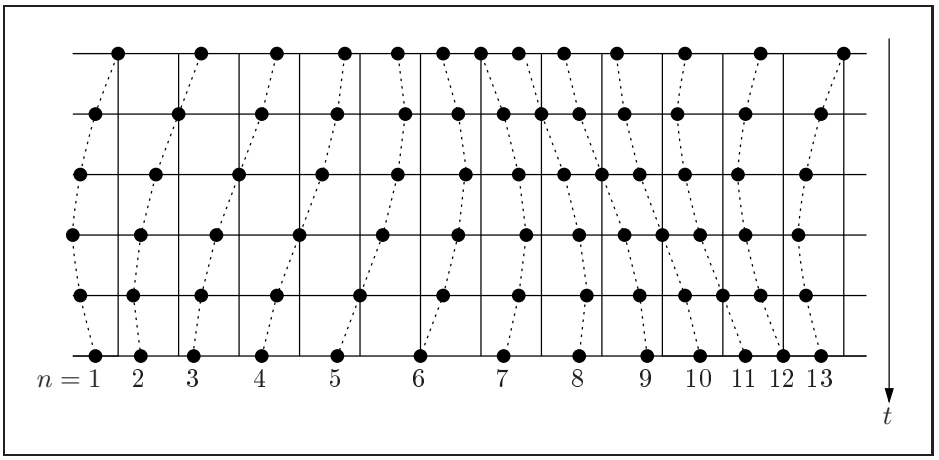
Mit der Definition $b_k = b_k^{(1)}$ reduziert sich (12.21) aufgrund von (12.25) auf

$$a_k(t) = b_k e^{-i\omega_k t} + b_{-k}^* e^{+i\omega_k t} \,, \tag{12.26}$$

so daß die reellen Auslenkungen (12.22) gegeben sind durch

$$x_n(t) = \sum_k \left[\frac{b_k}{\sqrt{N}} e^{i(kna - \omega_k t)} + \frac{b_{-k}^*}{\sqrt{N}} e^{i(kna + \omega_k t)} \right] . \tag{12.27}$$

Der erste bzw. zweite Term entspricht einer nach rechts bzw. links laufenden ebenen Welle. Eine nach rechts laufende ebene Welle in der linearen Kette läßt sich durch stroboskopische Aufnahme der Lage der Massenpunkte zu verschiedenen Zeiten illustrieren:



12.5 Übergang ins Kontinuum

Wir betrachten nun den Grenzübergang, daß immer mehr Massenpunkte dichter zusammenrücken, wobei die Länge L der linearen Kette konstant bleiben soll:

$$a \to 0\,, \quad N \to \infty\,, \quad L = aN = \text{endlich}\,. \tag{12.28}$$

In diesem Grenzübergang identifizieren wir die Auslenkungen der Massenpunkte gemäß

$$x_n(t) = f(x,t)\,, \quad x = na\,. \tag{12.29}$$

Einsetzen von (12.29) in die Newtonsche Bewegungsgleichung (12.5) ergibt

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \omega_0^2 \left[f(x+a,t) - 2f(x,t) + f(x-a,t)\right]\,. \tag{12.30}$$

Im Limes $a \to 0$ läßt sich $f(x \pm a, t)$ nach Taylor entwickeln:

$$f(x \pm a, t) = f(x,t) \pm a\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \pm \ldots\,. \tag{12.31}$$

Einsetzen von (12.31) in (12.30) führt bis zur zweiten Ordnung in a auf

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} &= \omega_0^2 \left[f(x,t) + a\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - 2f(x,t)\right. \\ &\quad \left. + f(x,t) - a\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right]\,,\end{aligned} \tag{12.32}$$

was sich auf die folgende partielle Differentialgleichung reduziert:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\,. \tag{12.33}$$

Hierbei wurde angenommen, daß im Limes $a \to 0$ die Größe

$$c = \omega_0 a \tag{12.34}$$

endlich bleibt. Im Grenzübergang (12.28) geht die lineare Kette in eine Saite über, deren Auslenkung $f(x,t)$ aus der Ruhelage der Wellengleichung (12.33) genügt. Die periodische Randbedingung (12.1) lautet in diesem Grenzübergang (12.28) wegen (12.29)

$$f(x,t) = f(x+L,t)\,. \tag{12.35}$$

Die Lösung von (12.33) und (12.35) folgt unmittelbar aus (12.27):

$$f(x,t) = \sum_k \left[\frac{b_k}{\sqrt{L}} e^{i(kx-\omega_k t)} + \frac{b^*_{-k}}{\sqrt{L}} e^{i(kx+\omega_k t)} \right]. \tag{12.36}$$

Die erlaubten k-Werte sind dabei wieder durch (12.10) gegeben, die Einschränkung (12.11) geht aber durch (12.28) über in $l \in \mathbb{Z}$. Die Dispersionsrelation (12.19) reduziert sich wegen (12.34) auf

$$\omega_k = c|k|\,. \tag{12.37}$$

Die Konstante c stellt damit die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle dar.

12.6 Eingespannte Saite

Liegt eine Saite der Länge L vor, die an ihren Enden fest eingespannt ist, so genügt deren Auslenkung $f(x,t)$ aus der Ruhelage der Wellengleichung (12.33). In diesem Fall sind aber die periodischen Randbedingungen (12.35) zu ersetzen durch die Dirichletschen Randbedingungen

$$f(0,t) = f(L,t) = 0\,. \tag{12.38}$$

Da es sich bei der Wellengleichung (12.33) um eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit t handelt, müssen als Anfangsbedingung die Anfangsauslenkungen

$$f(x,t)\Big|_{t=0} = F(x) \tag{12.39}$$

und die Anfangsgeschwindigkeiten

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = G(x) \tag{12.40}$$

vorgegeben sein. Die Auslenkung $f(x,t)$ der eingespannten Saite ergibt sich durch Lösung des mit (12.33) und (12.38)–(12.40) definierten Rand-und Anfangswertproblems.

Wir berechnen zunächst die Fundamentallösungen $f_n(x,t)$ für die Wellengleichung (12.33), die auch die Dirichletschen Randbedingungen (12.38) erfüllen. Hierzu führen wir den Separationsansatz

$$f_n(x,t) = g_n(x)\, h_n(t) \tag{12.41}$$

durch und erhalten aus (12.33):

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h_n(t)}\frac{d^2 h_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{g_n(x)}\frac{d^2 g_n(x)}{dx^2}\,. \tag{12.42}$$

Da die linke bzw. rechte Seite von (12.42) nur von t bzw. x abhängt, müssen beide gleich einer Konstanten sein, die wir mit $-k_n^2$ bezeichnen. Damit erhalten wir aus (12.42) die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} + k_n^2 g_n(x) = 0\,, \tag{12.43}$$

$$\frac{d^2 h_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 h_n(t) = 0\,, \tag{12.44}$$

wobei wir als Abkürzung

$$\omega_n = ck_n \tag{12.45}$$

eingeführt haben. Die allgemeine Lösung von (12.43) lautet

$$g_n(x) = a_n \sin k_n x + b_n \cos k_n x\,, \tag{12.46}$$

wobei die Randbedingungen (12.38) aufgrund des Separationsansatzes (12.41) auf die Einschränkungen

$$b_n = 0 \tag{12.47}$$

und

$$k_n = \frac{\pi}{L}\, n \tag{12.48}$$

führen. Hierbei kann n zunächst eine ganze Zahl sein. Den Wert $n = 0$ müssen wir ausschließen, da sonst $g_n(x)$ wegen (12.46)–(12.48) verschwinden würde. Außerdem führen die negativen ganzen Zahlen $n = -1, -2, \ldots$ gemäß (12.46)–(12.48) gegenüber den positiven ganzen Zahlen

$$n = 1, 2, \ldots \tag{12.49}$$

nicht zu neuen linear unabhängigen Lösungen. Deshalb können wir für n nur die Werte (12.49) zulassen. Die allgemeine Lösung von (12.44) lautet

$$h_n(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t\,, \tag{12.50}$$

so daß sich aus (12.41), (12.46) und (12.47) die Fundamentallösungen

$$f_n(x,t) = \sin k_n x \,(A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \tag{12.51}$$

ergeben. Hierbei haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_n = 1$ gesetzt.

Für eine lineare Differentialgleichung wie die Wellengleichung (12.33) gilt das Superpositionsprinzip. Es besagt, daß mit den Fundamentallösungen (12.51) auch die Linearkombination

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \,(A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \tag{12.52}$$

eine Lösung der Wellengleichung (12.33) ist. Außerdem erfüllt (12.52) per Konstruktion die Dirichletschen Randbedingung (12.38). Mit Hilfe der Anfangsbedingungen (12.39) und (12.40) lassen sich nun die Konstanten A_n und B_n festlegen. Einsetzen von (12.52) in (12.39) und (12.40) führt zunächst auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \;=\; F(x)\,, \tag{12.53}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin k_n x \;=\; G(x)\,. \tag{12.54}$$

Die Sinusfunktionen genügen einer Orthogonalitätsrelation:

$$\int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_{n'} x) \overset{(4.96),(12.48)}{=} \frac{L}{2}\left[\frac{\sin(n-n')\pi}{(n-n')\pi} - \frac{\sin(n+n')\pi}{(n+n')\pi}\right] = \frac{L}{2}\,\delta_{n,n'}\,. \tag{12.55}$$

Dabei wurde beim letzten Schritt ausgenutzt, daß n gemäß (12.49) nicht negativ sein kann. Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (12.55) können wir (12.53) nach B_n auflösen:

$$\int_0^L dx\, F(x) \sin k_{n'} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_{n'} x) \overset{(12.55)}{=} \frac{L}{2} B_{n'}\,, \tag{12.56}$$

so daß wir erhalten

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, F(x) \sin k_n x\,. \tag{12.57}$$

Entsprechend folgt aus (12.54)

$$A_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L dx\, G(x) \sin k_n x\,. \tag{12.58}$$

Aus (12.52), (12.57) und (12.58) können wir demnach die Lösung des durch (12.33) und (12.38)–(12.40) definierten Rand-und Anfangswertproblems ablesen. Unter Berücksichtigung von (12.45) und (12.48) erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x,t) \;=\; & \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{L} \left[\frac{2}{\pi c n} \int_0^L dx' G(x') \sin\frac{\pi n x'}{L} \sin\frac{\pi n c t}{L} \right. \\ & \left. + \frac{2}{L} \int_0^L dx' F(x') \sin\frac{\pi n x'}{L} \cos\frac{\pi n c t}{L} \right]\,. \end{aligned} \tag{12.59}$$

In der 17. Übungsaufgabe untersuchen wir die unterschiedliche Klangfarbe von Klavier und Cembalo, indem wir die Wellengleichung der eingespannten Saite unter Berücksichtigung der jeweiligen Rand- und Anfangsbedingungen lösen.

Kapitel 13

Rotierendes Bezugssystem

In allen gleichmäßig gegeneinander bewegten Systemen gelten in der klassischen Mechanik die Newtonschen Gesetze, wenn sie in einem gelten. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn ein System Beschleunigungen unterworfen wird, da dann in den Newtonschen Bewegungsgleichungen zusätzliche Scheinkräfte auftreten. Die neuen Bewegungsgleichungen erhält man, indem man die Newtonschen Bewegungsgleichungen in einem Inertialsystem aufstellt und in das beschleunigte System transformiert. In diesem Kapitel untersuchen wir exemplarisch die Newtonschen Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Bezugssystem und behandeln als Anwendung den freien Fall auf der Erde.

13.1 Transformation der Einheitsvektoren

Wir untersuchen die Transformation zwischen einem ruhenden Bezugssystem S und einem beliebig rotierenden Bezugssystem S', die beide denselben Ursprung besitzen. Während die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ von S zeitunabhängig sind, besitzen die Einheitsvektoren $\vec{e}_1'(t)$, $\vec{e}_2'(t)$, $\vec{e}_3'(t)$ von S' eine explizite Zeitabhängigkeit. Der Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren von S und S' lautet gemäß (1.47)

$$\vec{e}_i'(t) = R_{ij}(t)\,\vec{e}_j\,, \tag{13.1}$$

wobei die Matrixelemente $R_{ij}(t)$ durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ und $\vec{e}_j$ bestimmt sind:

$$R_{ij}(t) = \vec{e}_i'(t)\cdot\vec{e}_j = \cos\left[\sphericalangle\left(\vec{e}_i'(t)\,,\,\vec{e}_j\right)\right]\,. \tag{13.2}$$

In (13.1) haben wir die Summation über j bewußt nicht mitaufgeführt. Wir wollen nämlich von jetzt ab die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, wonach über zwei gleiche Indizes automatisch aufzusummieren ist. Wir setzen voraus, daß sowohl die Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ von S als auch die Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ von S' ein Orthonormalsystem bilden:

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}\,, \tag{13.3}$$

$$\vec{e}_i'(t)\cdot\vec{e}_j'(t) = \delta_{ij}\,. \tag{13.4}$$

Dies führt zu einer Einschränkung der Matrixelemente $R_{ij}(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{e}_k'(t)\cdot\vec{e}_l'(t) &\overset{(13.1)}{=} \left[R_{ki}(t)\,\vec{e}_i\right]\cdot\left[R_{lj}(t)\,\vec{e}_j\right] = R_{ki}(t)\,R_{lj}(t)\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \\ &\overset{(13.3)}{=} R_{ki}(t)\,R_{lj}(t)\,\delta_{ij} = R_{ki}(t)\,R_{li}(t)\,,\end{aligned} \tag{13.5}$$

so daß der Vergleich mit (13.4) auf die Beziehung

$$R_{ki}(t)\,R_{li}(t) = \delta_{kl} \tag{13.6}$$

führt. Sie besagt, daß die aus den Matrixelementen $R_{ij}(t)$ aufgebaute Matrix $R(t)$ orthonormal ist:

$$R(t)\,R^{\mathsf{T}}(t) = I\,. \tag{13.7}$$

Das Inverse der Matrix $R(t)$ ist demnach die transponierte Matrix

$$R^{-1}(t) = R^{\mathsf{T}}(t)\;, \tag{13.8}$$

so daß mit (13.7) auch gilt

$$R^{\mathsf{T}}(t)\,R(t) = I\,. \tag{13.9}$$

In Komponentenschreibweise heißt dies

$$R_{ik}(t)\,R_{il}(t) = \delta_{kl}\,. \tag{13.10}$$

Man beachte, daß die Summation in (13.6) bzw. in (13.10) über die zweiten bzw. die ersten Indizes der Matrixelemente $R_{ij}(t)$ erfolgt. Außerdem führt die Invertierung des Zusammenhanges (13.1) auf

$$R_{ik}(t)\,\vec{e}_i'(t) = R_{ik}(t)\,R_{ij}(t)\,\vec{e}_j \overset{(13.10)}{=} \delta_{kj}\vec{e}_j = \vec{e}_k\,, \tag{13.11}$$

so daß gilt

$$\vec{e}_i = \vec{e}_j'(t)\,R_{ji}(t)\;. \tag{13.12}$$

13.2 Zeitableitung der Einheitsvektoren

Wir betrachten nun die Zeitableitung von (13.1) und verwenden dabei, daß die Einheitsvektoren $\vec{e}_j$ von S nicht explizit zeitabhängig sind:

$$\dot{\vec{e}}_j = \vec{0}\,. \tag{13.13}$$

Mit Hilfe von (13.12) können wir dann die Zeitableitung der Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ von S' wieder nach den Basisvektoren $\vec{e}_i'(t)$ von S' zerlegen

$$\dot{\vec{e}}_i'(t) = \vec{e}_j'(t)\,\Omega_{ji}(t)\;, \tag{13.14}$$

wobei die Matrixelemente $\Omega_{ji}(t)$ gegeben sind durch

$$\Omega_{ji}(t) = R_{jk}(t)\,\dot{R}_{ik}(t)\;. \tag{13.15}$$

Differenzieren wir (13.6) nach der Zeit

$$\dot{R}_{ik}(t)\,R_{jk}(t) + R_{ik}(t)\,\dot{R}_{jk}(t) = 0\,, \tag{13.16}$$

so können wir mit Hilfe von (13.15) eine wichtige Eigenschaft der Matrixelemente $\Omega_{ji}(t)$ ablesen:

$$\Omega_{ji}(t) + \Omega_{ij}(t) \;=\; 0\,. \tag{13.17}$$

Demnach besitzt die aus den Matrixelementen $\Omega_{ij}(t)$ aufgebaute Matrix

$$\Omega(t) = R(t)\dot{R}(t)^{\mathsf{T}} \tag{13.18}$$

die Eigenschaft, antisymmetrisch zu sein:

$$\Omega(t) + \Omega^{\mathsf{T}}(t) = 0\,. \tag{13.19}$$

Eine antisymmetrische 3×3-Matrix wie $\Omega(t)$ besteht aus genau drei verschiedenen Komponenten $\Omega_1'(t)$, $\Omega_2'(t)$ und $\Omega_3'(t)$:

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3'(t) & \Omega_2'(t) \\ \Omega_3'(t) & 0 & -\Omega_1'(t) \\ -\Omega_2'(t) & \Omega_1'(t) & 0 \end{pmatrix} . \tag{13.20}$$

Wir führen nun einen Vektor $\vec{\Omega}(t)$ im rotierenden Bezugssystem ein, der gerade aus diesen drei verschiedenen Komponenten $\Omega_1'(t)$, $\Omega_2'(t)$ und $\Omega_3'(t)$ besteht:

$$\vec{\Omega}(t) = \Omega_i'(t)\vec{e}_i'(t) . \tag{13.21}$$

Dann können wir mit Hilfe des Levi-Cività-Tensors (1.24) zwischen den Elementen der antisymmetrischen 3×3-Matrix (13.20) und den Komponenten des Vektors (13.21) den folgenden Zusammenhang angeben:

$$\Omega_{ij}(t) = \varepsilon_{jik}\Omega_k'(t) . \tag{13.22}$$

Tatsächlich gilt für die nicht verschwindenden Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(t) &= \varepsilon_{213}\Omega_3'(t) = -\Omega_3'(t), & \Omega_{21}(t) &= \varepsilon_{123}\Omega_3'(t) = \Omega_3'(t) , \\ \Omega_{13}(t) &= \varepsilon_{312}\Omega_2'(t) = \Omega_2'(t), & \Omega_{31}(t) &= \varepsilon_{132}\Omega_2'(t) = -\Omega_2'(t) , \\ \Omega_{23}(t) &= \varepsilon_{321}\Omega_1'(t) = -\Omega_1'(t), & \Omega_{32}(t) &= \varepsilon_{231}\Omega_1'(t) = \Omega_1'(t) . \end{aligned} \tag{13.23}$$

Man kann aber auch die Beziehung (13.22) zwischen den Elementen der antisymmetrischen 3×3-Matrix (13.20) und den Komponenten des Vektors (13.21) mit Hilfe von (1.54) invertieren und erhält

$$\Omega_k'(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\Omega_{ji}(t) . \tag{13.24}$$

Setzen wir (13.22) in (13.14) ein, so erhalten wir zunächst

$$\dot{\vec{e}}_i'(t) = \vec{e}_j'(t)\,\varepsilon_{ijk}\Omega_k'(t) \overset{(1.23)}{=} \Omega_k'(t)\varepsilon_{kij}\vec{e}_j'(t) . \tag{13.25}$$

Analog zu (1.20) gilt folgende Beziehung zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ von S' und dem Levi-Cività-Tensor ε_{ijk}:

$$\vec{e}_i'(t) \times \vec{e}_j'(t) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k'(t) . \tag{13.26}$$

Einsetzen von (13.26) in (13.25) ergibt

$$\dot{\vec{e}}_i'(t) = \Omega_k'(t)\vec{e}_k'(t) \times \vec{e}_i'(t) \overset{(13.21)}{=} \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i'(t) . \tag{13.27}$$

Diese Beziehung rechtfertigt es, den Vekor $\vec{\Omega}(t)$ mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor zu identifizieren. In der 18. Übungsaufgabe betrachten wir spezielle Drehmatrizen $R(t)$ und zeigen, daß man mit Hilfe von (13.18), (13.20), (13.21) den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}(t)$ ablesen kann, der die entsprechende Rotation beschreibt.

13.3 Zeitableitung der Vektorkomponenten

Ein Vektor $\vec{A}(t)$ kann nun sowohl nach den Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ von S

$$\vec{A}(t) = A_i(t)\,\vec{e}_i \tag{13.28}$$

als auch nach den Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ von S'

$$\vec{A}(t) = A_i'(t)\,\vec{e}_i'(t) \tag{13.29}$$

entwickelt werden. Bei der Entwicklung (13.28) bezüglich S rührt die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{A}(t)$ nur von den Vektorkomponenten $A_i(t)$ her, so daß die Zeitableitung ergibt

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \overset{(13.28)}{=} \frac{dA_i(t)}{dt}\vec{e}_i \,. \tag{13.30}$$

Bei der Entwicklung (13.29) bezüglich S' dagegen rührt die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{A}(t)$ sowohl von den Vektorkomponenten $A'_i(t)$ als auch von den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ her:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \overset{(13.29)}{=} \frac{dA'_i(t)}{dt}\vec{e}'_i(t) + A'_i(t)\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} \overset{(13.27),(13.29)}{=} \frac{dA'_i(t)}{dt}\vec{e}'_i(t) + \vec{\Omega}(t)\times\vec{A}(t) \,. \tag{13.31}$$

Die Zeitableitung des Vektors $\vec{A}(t)$ bezüglich S

$$\left.\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|_S \overset{(13.30)}{=} \frac{dA_i(t)}{dt}\vec{e}_i \tag{13.32}$$

setzt sich demnach additiv aus der Zeitableitung des Vektors $\vec{A}(t)$ bezüglich S'

$$\left.\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|_{S'} = \frac{dA'_i(t)}{dt}\vec{e}'_i(t) \tag{13.33}$$

und der Zeitableitung der Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S'

$$\vec{\Omega}(t)\times\vec{A}(t) \tag{13.34}$$

zusammen. Man bezeichnet (13.32) als wahre Zeitableitung, (13.33) als scheinbare Zeitlableitung und (13.34) als Rotationsableitung. Demnach kann man (13.31) auch schreiben als

$$\left.\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}(t)\times\vec{A}(t) \,. \tag{13.35}$$

Als Kurzschreibweise kann man (13.35) auch als operatorwertige Gleichung auffassen:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_S \bullet = \left.\frac{d}{dt}\right|_{S'} \bullet + \vec{\Omega}(t)\times\bullet \,. \tag{13.36}$$

13.4 Trägheitskräfte

Wir wenden nun (13.36) auf die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes an und erhalten für die Geschwindigkeit

$$\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}(t)\times\vec{r}(t) \,. \tag{13.37}$$

Dann wenden wir die Operatorengleichung (13.36) nochmals auf (13.37) an und erhalten für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_S &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}(t)\times\right)\left(\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}(t)\times\vec{r}(t)\right) \\ &= \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_{S'} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt}\right|_{S'}\times\vec{r}(t) + 2\vec{\Omega}(t)\times\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}(t)\times\left[\vec{\Omega}(t)\times\vec{r}(t)\right] \,.\end{aligned} \tag{13.38}$$

Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung im ruhenden Bezugssystem S

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_S = \vec{F} \tag{13.39}$$

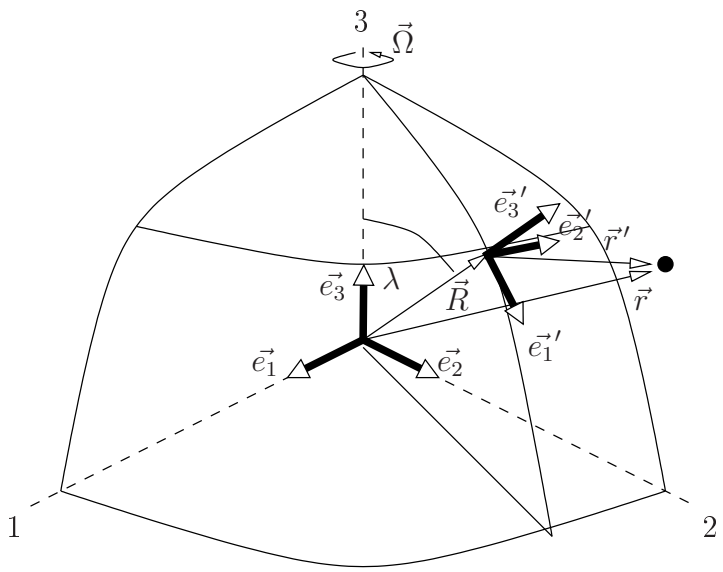
folgt dann mit Hilfe von (13.38) eine entsprechende Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem S':

$$m\left.\frac{d^2\vec{r}\,(t)}{dt^2}\right|_{S'} = \vec{F} - m\left.\frac{d\vec{\Omega}\,(t)}{dt}\right|_{S'} \times\vec{r}\,(t) - 2m\vec{\Omega}\,(t)\times\left.\frac{d\vec{r}\,(t)}{dt}\right|_{S'} - m\vec{\Omega}\,(t)\times\left[\vec{\Omega}\,(t)\times\vec{r}\,(t)\right] . \qquad (13.40)$$

Es handelt sich hierbei wieder um eine Newtonsche Bewegungsgleichung, bei der aber neben der Kraft $\vec{F}$ noch drei Scheinkräfte hinzukommen: die lineare Kraft, die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft.

13.5 Freier Fall auf der Erde

Als Anwendung betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes im Bezugssystem S', das an der Erdoberfläche fixiert ist:



Zeigt der Vektor $\vec{R}\,(t)$ vom Ursprung von S zum Ursprung von S', so gilt für die Ortsvektoren $\vec{r}\,(t)$ und $\vec{r}\,'(t)$ in den beiden Bezugssystemen S und S'

$$\vec{r}\,(t) = \vec{R}\,(t) + \vec{r}\,'(t) . \qquad (13.41)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung (13.39) im ruhenden Bezugssystem S transformiert sich dann wie vorher mit (13.38), wobei aber noch ein zusätzlicher Term durch die Bewegung $\vec{R}\,(t)$ des Ursprungs von S' hinzukommt:

$$\begin{aligned} m\left.\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}\right|_{S'} = \quad & \vec{F} - m\left.\frac{d^2\vec{R}\,(t)}{dt^2}\right|_{S} - m\left.\frac{d\vec{\Omega}\,(t)}{dt}\right|_{S'} \times\vec{r}\,'(t) \\ & -2m\vec{\Omega}\,(t)\times\left.\frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt}\right|_{S'} - m\vec{\Omega}\,(t)\times\left[\vec{\Omega}\,(t)\times\vec{r}\,'(t)\right] . \end{aligned} \qquad (13.42)$$

Die Beschleunigung des Ursprunges von S' muß ebenfalls noch gemäß (13.38) auf das bewegte Bezugssystem S' umgerechnet werden:

$$\left.\frac{d^2\vec{R}\,(t)}{dt^2}\right|_{S} = \left.\frac{d^2\vec{R}\,(t)}{dt^2}\right|_{S'} + \left.\frac{d\vec{\Omega}\,(t)}{dt}\right|_{S'} \times\vec{R}\,(t) + 2\vec{R}\,(t)\times\left.\frac{d\vec{R}\,(t)}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}\,(t)\times\left[\vec{\Omega}\,(t)\times\vec{R}\,(t)\right] . \qquad (13.43)$$

Da der Vektor $\vec{R}\,(t)$ vom bewegten Bezugssystem S' aus eine zeitunabhängige Größe ist, gilt

$$\left.\frac{d\vec{R}\,(t)}{dt}\right|_{S'} = \vec{0}, \qquad \left.\frac{d^2\vec{R}\,(t)}{dt^2}\right|_{S'} = \vec{0}\,. \tag{13.44}$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}\,(t)$ der Erde im bewegten Bezugssystem S' zeitunabhängig ist:

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}\,(t)}{dt}\right|_{S'} = \vec{0}\,. \tag{13.45}$$

Berücksichtigen wir noch, daß im ruhenden Bezugssystem S die Newtonsche Gravitationskraft wirkt

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{r}\,(t)|^2}\frac{\vec{r}\,(t)}{|\vec{r}\,(t)|}\,, \tag{13.46}$$

so folgt aus (13.41)-(13.46) die noch exakte Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\left.\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}\right|_{S'} \;=\; & -\frac{GmM}{|\vec{R}\,(t)+\vec{r}\,'(t)\,|^2}\frac{\vec{R}\,(t)+\vec{r}\,'(t)}{|\vec{R}\,(t)+\vec{r}\,'(t)\,|} - 2m\vec{\Omega}\,(t)\times\left.\frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt}\right|_{S'} \\ & -m\vec{\Omega}\,(t)\times\Big[\vec{\Omega}\,(t)\times\vec{r}\,'(t)\Big] - m\dot{\vec{\Omega}}\,(t)\times\Big[\vec{\Omega}\,(t)\,\vec{R}\,(t)\Big]\,. \end{aligned} \tag{13.47}$$

Hier können wir zwei physikalische Näherungen durchführen. Da der Betrag des Winkelgeschwindigkeitsvektors sehr klein ist

$$\Omega = |\vec{\Omega}(t)| = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60\,\mathrm{s}} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\frac{1}{\mathrm{s}}\,, \tag{13.48}$$

kann man in (13.47) die in $\vec{\Omega}\,(t)$ quadratischen Terme vernachlässigen. Betrachtet man außerdem einen Massenpunkt in der Nähe der Erdoberfläche, so läßt sich $\vec{R}\,(t)+\vec{r}\,'(t)$ näherungsweise durch $\vec{R}\,(t)$ ersetzen. Damit können wir die Erdbeschleunigung

$$\vec{g} = -G\frac{M}{|\vec{R}\,(t)\,|^2}\frac{\vec{R}\,(t)}{|\vec{R}\,(t)\,|} \tag{13.49}$$

einführen, deren Betrag von der Masse der Erde $M = 6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und dem Erdradius $|\vec{R}\,(t)\,| = 6{,}4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$ bestimmt wird:

$$g = |\vec{g}| = 6{,}6\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\frac{6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m})^2} = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,. \tag{13.50}$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (13.47) schließlich auf

$$\ddot{\vec{r}}\,'(t) = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\,(t)\times\dot{\vec{r}}\,'(t)\,. \tag{13.51}$$

Beim freien Fall auf der Erde tritt demnach im Unterschied zum ruhenden Bezugssystem noch die Coriolis-Beschleunigung auf, die den Körper in x'- und y'-Richtung ablenkt. Die in (13.51) auftretenden Vektoren lauten im bewegten Bezugssystem

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'\,(t) \\ y'\,(t) \\ z'\,(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega}\,(t) = \begin{pmatrix} -\Omega\sin\lambda \\ 0 \\ \Omega\cos\lambda \end{pmatrix}, \tag{13.52}$$

wie aus der obigen Skizze hervorgeht. Mit dem Vektorprodukt

$$\vec{\Omega}\,(t)\times\dot{\vec{r}}\,'(t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1\,'(t) & \vec{e}_2\,'(t) & \vec{e}_3\,'(t) \\ -\Omega\sin\lambda & 0 & \Omega\cos\lambda \\ \dot{x}'(t) & \dot{y}'(t) & \dot{z}'(t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\cos\lambda\,\dot{y}'(t) \\ \Omega\cos\lambda\,\dot{x}'(t)+\Omega\sin\lambda\,\dot{z}'(t) \\ -\Omega\sin\lambda\,\dot{y}'(t) \end{pmatrix} \tag{13.53}$$

erhält man die drei gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}'(t) = 2\Omega\cos\lambda\,,\dot{y}'(t) \tag{13.54}$$
$$\ddot{y}'(t) = -2\Omega\cos\lambda\,\dot{x}'(t) - 2\Omega\sin\lambda\,,\dot{z}'(t) \tag{13.55}$$
$$\ddot{z}'(t) = -g + 2\Omega\sin\lambda\,\dot{y}'(t)\,. \tag{13.56}$$

Beim freien Fall auf der Erde wird der Körper aus der Höhe h zur Zeit $t = 0$ losgelassen, so daß sich folgende Anfangsbedingungen ergeben:

$$x'(0) = y'(0) = 0\,,\; z'(0) = h\,, \quad \dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = \dot{z}'(0) = 0\,. \tag{13.57}$$

Die Bewegungsgleichungen (13.54)–(13.56) lassen sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (13.57) einmal hochintegrieren:

$$\dot{x}'(t) = 2\Omega\cos\lambda\,y'(t)\,, \tag{13.58}$$
$$\dot{y}'(t) = -2\Omega\cos\lambda\,x'(t) - 2\Omega\sin\lambda\,z'(t) + 2\Omega h\sin\lambda\,, \tag{13.59}$$
$$\dot{z}'(t) = -gt + 2\Omega\sin\lambda\,y'(t)\,. \tag{13.60}$$

Einsetzen von (13.58) und (13.60) in (13.55) führt auf

$$\ddot{y}'(t) = -4\Omega^2 y'(t) + 2\Omega g t\sin\lambda\,. \tag{13.61}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y'(t) = \frac{g\sin\lambda}{2\Omega}t + A\cos 2\Omega t + B\sin 2\Omega t\,. \tag{13.62}$$

Die Einarbeitung der Anfangsbedingungen (13.57) legt die Parameter A und B fest:

$$y'(0) = A = 0 \tag{13.63}$$
$$\dot{y}'(0) = \frac{g\sin\lambda}{2\Omega} + B2\Omega = 0 \;\Rightarrow\; B = -\frac{g\sin\lambda}{4\Omega^2}\,. \tag{13.64}$$

Einsetzen von (13.63) und (13.64) in (13.62) führt auf die gesuchte Lösung

$$y'(t) = \frac{g\sin\lambda}{2\Omega}\left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega}\right)\,. \tag{13.65}$$

Unter Verwendung von (13.65) gehen (13.58) und (13.60) über in

$$\dot{x}'(t) = g\sin\lambda\cos\lambda\left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega}\right)\,, \tag{13.66}$$
$$\dot{z}'(t) = -gt + g\sin^2\lambda\left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega}\right)\,, \tag{13.67}$$

so daß eine Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (13.57) ergibt:

$$x'(t) = g\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\Omega t - 1}{4\Omega^2}\right)\,, \tag{13.68}$$
$$z'(t) = h - \frac{g}{2}t^2 + g\sin^2\lambda\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\Omega t - 1}{4\Omega^2}\right)\,. \tag{13.69}$$

Die zeitlichen Oszillationen, die beim freien Fall auf der Erde gemäß (13.65), (13.68), (13.69) auftreten sollen, sind aber nicht physikalisch. Es handelt sich hierbei lediglich um ein mathematisches Artefakt, das dadurch entstand, daß wir die in der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$ quadratischen Terme in (13.47) vernachlässigten. Da wir in der zugrunde liegenden Bewegungsgleichung (13.47)

nur die Terme berücksichtigten, die in der Winkelgeschwindigkeit linear sind, sind in der Lösung unseres Anfangswertproblems auch nur diejenigen Terme physikalisch, die linear in der Winkelgeschwindigkeit sind. Deshalb entwickeln wir die trigonometrischen Funktionen in (13.65), (13.68), (13.69) nach Taylor bezüglich der Winkelgeschwindigkeit Ω:

$$\sin 2\Omega t = 2\Omega t - \frac{1}{6}(2\Omega t)^3 + \dots , \qquad \cos 2\Omega t = 1 - \frac{1}{2}(2\Omega t)^2 + \dots . \tag{13.70}$$

Die erste Ordnung in Ω lautet dann

$$x'(t) \overset{(13.68),(13.70)}{=} g \sin\lambda \cos\lambda \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1 - 2\Omega^2 t^2 - 1}{4\Omega^2} \right) + \dots = 0 + \dots , \tag{13.71}$$

$$y'(t) \overset{(13.65),(13.70)}{=} \frac{g \sin\lambda}{2\Omega} \left(t - \frac{2\Omega t - 4\Omega^3 t^3/3}{2\Omega} \right) + \dots = \frac{1}{3}\Omega g \sin\lambda t^3 + \dots , \tag{13.72}$$

$$z'(t) \overset{(13.69),(13.70),(13.72)}{=} h - \frac{g}{2}t^2 + \dots . \tag{13.73}$$

Demnach wird ein fallender Massenpunkt nach Osten abgelenkt. Dieses Ergebnis erscheint zunächst paradox, weil sich die Erde doch auch nach Osten dreht. Es wird aber sofort anschaulich verständlich, wenn man bedenkt, daß der Massenpunkt in der Höhe h zur Zeit $t = 0$ durch die Erdrotation bezüglich des ruhenden Bezugssystems eine größere Geschwindigkeitskomponente ostwärts besitzt als bezüglich des bewegten Bezugssystems S' auf der Erdoberfläche. Es ist diese "überschüssige" Geschwindigkeit in Ostrichtung, die für den Beobachter auf der Erde den Massenpunkt nach Osten fallen läßt.

Zur quantitativen Auswertung setzen wir die Zeit zum Durchfallen der Höhe h nach (13.73)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{13.74}$$

in (13.72) ein und erhalten für die Ostablenkung

$$y' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Omega h \sin\lambda \sqrt{\frac{h}{g}} . \tag{13.75}$$

Am Äquator mit $\lambda = \pi/2$ ist diese Ostablenkung maximal und ergibt bei einer Höhe von $h = 100\,\mathrm{m}$

$$y' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, 7{,}27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{s}} 100\,\mathrm{m} \sqrt{\frac{100\mathrm{m}}{9{,}8\mathrm{m/s}^2}} = 2{,}2\,\mathrm{cm} . \tag{13.76}$$

In unseren Breiten mit $\lambda = 40^o$ ist diese Ostablenkung um den Faktor

$$\sin 40^o = 0{,}64 \tag{13.77}$$

unterdrückt.

Kapitel 14

Kinematik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, deren Abstände konstant sind. Praktisch kann dies ein Sück gewöhnlicher fester Materie sein, wie etwa ein Stein oder ein Kugelschreiber. Näherungsweise kann man aber auch die Erde als starren Körper bezeichnen.

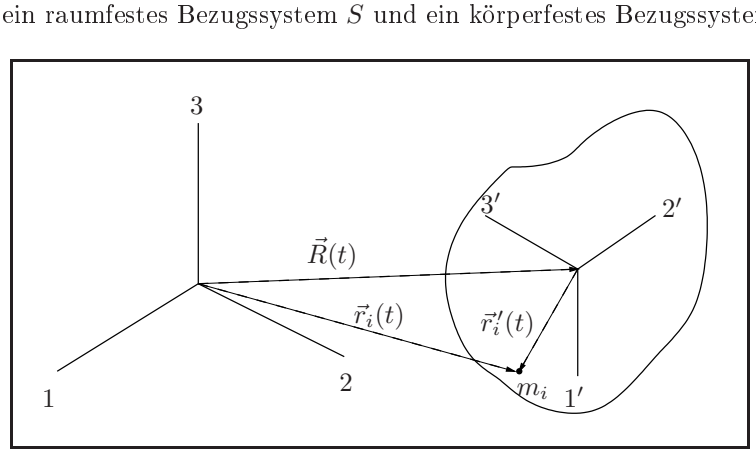
Betrachten wir zunächst $N = 3$ Massenpunkte. Die insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ kartesischen Koordinaten unterliegen 3 Zwangsbedingungen durch die 3 vorgegebenen Abstände zwischen den Massenpunkten. Das System besitzt demnach $9 - 3 = 6$ Freiheitsgrade. Die Lage jedes weiteren Massenpunktes kann dann dadurch fixiert werden, daß man seine Abstände zu den 3 bereits vorhandenen Massenpunkten angibt. Jeder weitere Massenpunkt ergibt so 3 zusätzliche Koordinaten und 3 zusätzliche Zwangsbedingungen. Daher bleibt es auch für $N \geq 3$ Massenpunkte bei $f = 6$ Freiheitsgraden eines starren Körpers. Dabei benötigt man 3 Freiheitsgrade, um die Lage des Schwerpunktes zu charakterisieren und 3 Freiheitsgrade, um die Orientierung des starren Körpers relativ zu den Achsen eines Bezugssystems festzulegen.

Die Bewegung eines starren Körpers wird durch die Zeitabhängigkeit von 6 geeigneten Koordinaten beschrieben. Die Kinematik behandelt die bloße Beschreibung dieser Bewegung und die Dynamik untersucht die Gesetze, nach denen diese Bewegung abläuft.

Wird ein Punkt des starren Körpers festgehalten, so bezeichnen wir ihn als Kreisel. Dann fällt die Translation weg und es bleiben nur die 3 Freiheitsgrade der Rotation.

14.1 Kinetische Energie des starren Körpers

Wir betrachten ein raumfestes Bezugssystem S und ein körperfestes Bezugssystem S':



Die Transformation zwischen beiden Bezugssystemen erfolgt dann durch

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_i'(t)\,, \tag{14.1}$$

wobei $\vec{r}_i(t)$ und $\vec{r}_i'(t)$ die jeweiligen Ortsvektoren eines Massenpunktes m_i darstellen und $\vec{R}(t)$ die Verschiebung des Ursprunges charakterisiert. Zerlegt man den Ortsvektor $\vec{r}_i'(t)$ nach den Eigenvekoren $\vec{e}_k'(t)$ von S'

$$\vec{r}_i'(t) = x_i'\vec{e}_1'(t) + y_i'\vec{e}_2'(t) + z_i'\vec{e}_3'(t)\,, \tag{14.2}$$

so erkennt man den Vorteil des körperfesten Bezugssystems S'. Die Koordinaten der Massenpunkte sind nämlich zeitlich konstant:

$$\dot{x}_i' = \dot{y}_i' = \dot{z}_i' = 0\,. \tag{14.3}$$

Nach (13.35), (14.1) und (14.3) transformiert sich dann die Geschwindigkeit zwischen beiden Bezugssystemen gemäß

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}_i'(t)\,. \tag{14.4}$$

Wir berechnen nun die kinetische Energie des starren Körpers. Im raumfesten Bezugssystem S gilt

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}(t)\,. \tag{14.5}$$

Einsetzen von (14.4) in (14.5) führt dann auf

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2(t) + \dot{\vec{R}}(t) \cdot \left[\vec{\Omega}(t) \times \sum_i m_i \vec{r}_i'(t)\right] + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}_i'(t)\right]^2\,. \tag{14.6}$$

Der zweite Term in (14.6) verschwindet, wenn $\sum_i m_i \vec{r}_i'(t) = \vec{0}$ ist, d.h. wenn der Ursprung von S' mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfällt. Dann entspricht der erste Term in (14.6) gerade der translatorischen, kinetischen Energie T_M des Schwerpunktes und der dritte Term in (14.6) ergibt die kinetische Energie T' des starren Körpers im körperfesten Bezugssystem S', die man auch als Rotationsenergie bezeichnet. Damit folgt aus (14.6) die Zerlegung

$$T = T_M + T'\,. \tag{14.7}$$

Mit Hilfe der Vektoridentität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \tag{14.8}$$

aus der 1. Übungsaufgabe läßt sich diese Rotationsenergie genauer untersuchen:

$$T' = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left\{\vec{\Omega}^2(t)\vec{r}_i'^2(t) - \left[\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{r}_i'(t)\right]^2\right\}\,. \tag{14.9}$$

Setzt man die Zerlegungen (13.21) und (14.2) von $\vec{\Omega}(t)$ und $\vec{r}_i'(t)$ bezüglich des körperfesten Bezugssystems S' in (14.9) ein, so folgt

$$\begin{aligned} T' \;=\; & \frac{1}{2}\sum_i m_i \Big\{ \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right)\left[\Omega_1'^2(t) + \Omega_2'^2(t) + \Omega_3'^2(t)\right] \\ & - \left[\Omega_1'(t)x_i' + \Omega_2'(t)y_i' + \Omega_3'(t)z_i'\right]^2 \Big\}\,. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Man erhält demnach eine Bilinearform in den körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

$$T' = \frac{1}{2}\Theta_{jk}'\Omega_j'(t)\Omega_k'(t)\,, \tag{14.11}$$

wobei der Trägheitstensor

$$\Theta' = (\Theta'_{jk}) = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i'^2 + z_i'^2 & -x_i' y_i' & -x_i' z_i' \\ -x_i' y_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i' z_i' \\ -x_i' z_i' & -y_i' z_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{pmatrix} \tag{14.12}$$

auftritt, der offensichtlich symmetrisch ist:

$$\Theta' = \Theta'^{\mathsf{T}} . \tag{14.13}$$

Da der Trägheitstensor (14.12) mit Hilfe der körperfesten Koordinaten x_i', y_i', z_i' berechnet wird, ist er automatisch zeitunabhängig. Im Grenzübergang einer kontinuierlichen Massenverteilung mit der Dichte $\rho = \rho(x', y', z')$ gilt

$$\sum_i m_i \to \int dx' \int dy' \int dz' \rho(x', y', z') , \tag{14.14}$$

so daß der Trägheitstensor (14.12) übergeht in

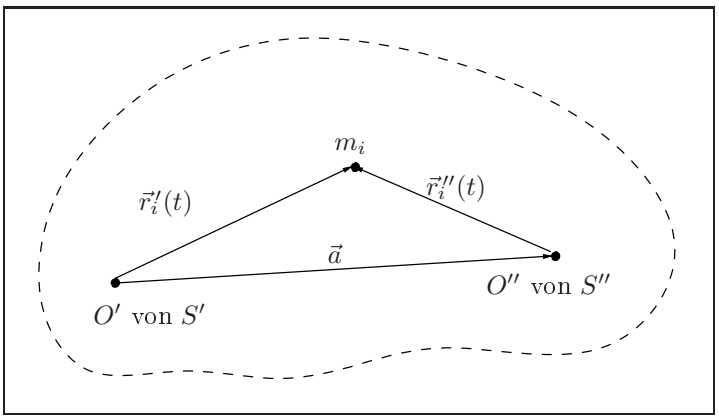
$$\Theta' = \int dx' \int dy' \int dz' \rho(x', y', z') \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -x'y' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -x'z' & -y'z' & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix} . \tag{14.15}$$

Umgekehrt kann man aber auch (14.12) aus (14.15) zurückerhalten, wenn man die Dichte einer Ansammlung von Massenpunkten m_i mit Hilfe von Delta-Funktionen ausdrückt:

$$\rho(x', y', z') = \sum_i m_i \delta(x' - x_i') \delta(y' - y_i') \delta(z' - z_i') . \tag{14.16}$$

14.2 Steinerscher Satz

Wir nehmen nun an, daß (14.1) nicht in den Schwerpunkt sondern in einen beliebigen Punkt des starren Körpers transformiert. Dann kann man den Ursprung O' des körperfesten Bezugssystems S' in den Schwerpunkt translatieren:



Ein weiterer Wechsel des Bezugssystems von S' nach S'' lautet analog zu (14.1)

$$\vec{r}_i'(t) = \vec{a} + \vec{r}_i''(t) , \tag{14.17}$$

wobei $\vec{a}$ vom Ursprung O' von S' auf den Schwerpunkt zeigt. Dabei gewährleisten die Bedingungen

$$\sum_i m_i x_i'' = \sum_i m_i y_i'' = \sum_i m_i z_i'' = 0 , \tag{14.18}$$

daß der Ursprung O'' von S'' mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Unter Verwendung von (14.17) geht der Trägheitstensor (14.12) über in

$$\begin{aligned}\Theta' &= \sum_i m_i \begin{pmatrix} (a_y+y_i'')^2+(a_z+z_i'')^2 & -(a_x+x_i'')(a_y+y_i'') & -(a_x+x_i'')(a_z+z_i'') \\ -(a_x+x_i'')(a_y+y_i'') & (a_x+x_i'')^2+(a_z+z_i'')^2 & -(a_y+y_i'')(a_z+z_i'') \\ -(a_x+x_i'')(a_z+z_i'') & -(a_y+y_i'')(a_z+z_i'') & (a_x+x_i'')^2+(a_y+y_i'')^2 \end{pmatrix} \\ &= \sum_i m_i \begin{pmatrix} a_y^2+a_z^2 & -a_xa_y & -a_xa_z \\ -a_xa_y & a_x^2+a_z^2 & -a_ya_z \\ -a_xa_z & -a_ya_z & a_x^2+a_z^2 \end{pmatrix} + \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i''^2+z_i''^2 & -x_i''y_i'' & -x_i''z_i'' \\ -x_i''y_i'' & x_i''^2+z_i''^2 & -y_i''z_i'' \\ -x_i''z_i'' & -y_i''z_i'' & x_i''^2+y_i''^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_i m_i \begin{pmatrix} 2(a_yy_i''+a_zz_i'') & -(a_yx_i''+a_xy_i'') & -(a_zx_i''+a_xz_i'') \\ -(a_yx_i''+a_xy_i'') & 2(a_xz_i''+a_zx_i'') & -(a_zy_i''+a_yz_i'') \\ -(a_zx_i''+a_xz_i'') & -(a_zy_i''+a_yz_i'') & 2(a_xy_i''+a_yx_i'') \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.19}$$

Aufgrund von (14.18) entfällt der dritte Term in (14.19) und der Trägheitstensor Θ' zerfällt in einen Trägheitstensor Θ_M, der so berechnet wird, als ob die gesamte Masse $M = \sum_i m_i$ im Schwerpunkt vereinigt wäre und in einen Trägheitstensor Θ'', der vom Schwerpunkt aus berechnet wird:

$$\Theta' = \Theta_M + \Theta''. \tag{14.20}$$

Dies ist die Aussage des Steinerschen Satzes.

14.3 Trägheitstensor der Erde

Die Erde kann man näherungsweise als ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c auffassen. Mit Hilfe der Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x'(r,\vartheta,\varphi) \\ y'(r,\vartheta,\varphi) \\ z'(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\sin\vartheta\cos\varphi \\ br\sin\vartheta\sin\varphi \\ cr\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{14.21}$$

und der Wertebereiche

$$r \in [0,1] \quad \vartheta \in [0,\pi] \quad \varphi \in [0,2\pi] \tag{14.22}$$

lassen sich alle Punkte des Ellipsoids berechnen. Für $r = 1$ erhält man beispielsweise die Oberfläche des Ellipsoids mit der Normalform

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1. \tag{14.23}$$

Die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation (14.21) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial r} & \frac{\partial y'}{\partial r} & \frac{\partial z'}{\partial r} \\ \frac{\partial x'}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y'}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z'}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x'}{\partial \varphi} & \frac{\partial y'}{\partial \varphi} & \frac{\partial z'}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\sin\vartheta\cos\varphi & b\sin\vartheta\sin\varphi & c\cos\vartheta \\ ar\cos\vartheta\cos\varphi & br\cos\vartheta\sin\varphi & -cr\sin\vartheta \\ -ar\sin\vartheta\sin\varphi & br\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc\,r^2\left(\sin\vartheta\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^3\vartheta\sin^2\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi + \sin^3\vartheta\cos^2\varphi\right) \\ &= abc\,r^2\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{14.24}$$

Die Transformation des Volumenelementes von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten lautet dann

$$dx'dy'dz' = abc\,r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi, \tag{14.25}$$

so daß sich die Masse der Erde bei einer als konstant angenommenen Dichte ergibt zu

$$M = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\,\rho\,abc\,r^2\sin\vartheta = \rho\frac{4\pi}{3}abc. \tag{14.26}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Trägheitstensor (14.15) für ein Ellipsoid berechnen. Für die Hauptdiagonalelemente erhalten wir

$$\Theta'_{11} = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho \,(b^2 r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + c^2 r^2 \cos^2\vartheta)\,, \tag{14.27}$$

$$\Theta'_{22} = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho \,(a^2 r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + c^2 r^2 \cos^2\vartheta)\,, \tag{14.28}$$

$$\Theta'_{33} = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho \,(a^2 r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + b^2 r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi)\,, \tag{14.29}$$

und die Nebendiagonalelemente ergeben sich zu

$$\Theta'_{12} = -\int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho\, ar \sin\vartheta \cos\varphi\, br \sin\vartheta \sin\varphi\,, \tag{14.30}$$

$$\Theta'_{13} = -\int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho\, ar \sin\vartheta \cos\varphi\, cr \cos\vartheta\,, \tag{14.31}$$

$$\Theta'_{23} = -\int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, abc\, r^2 \sin\vartheta \rho\, br \sin\vartheta \sin\varphi\, cr \cos\vartheta\,. \tag{14.32}$$

Wir bemerken, daß aufgrund der φ-Integrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{14.33}$$

alle Nebendiagonalelemente (14.30)–(14.32) verschwinden. Bei den Hauptdiagonalelementen (14.27)–(14.29) tritt das r-Integral

$$\int_0^1 dr\, r^4 = \frac{1}{5}\,, \tag{14.34}$$

die φ-Integrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = \pi\,, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = \pi\,, \tag{14.35}$$

und die ϑ-Integrale

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta = \frac{4}{3}\,, \quad \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\cos^2\vartheta = \frac{2}{3} \tag{14.36}$$

auf. Damit lautet der Trägheitstensor des Ellipsoids:

$$\begin{aligned}\Theta' &= \rho abc \frac{1}{5} \begin{pmatrix} b^2\frac{4}{3}\pi + c^2\frac{2}{3}2\pi & 0 & 0 \\ 0 & a^2\frac{4}{3}\pi + c^2\frac{2}{3}2\pi & 0 \\ 0 & 0 & a^2\frac{4}{3}\pi + b^2\frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ &\overset{(14.26)}{=} \frac{M}{5} \begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.37}$$

14.4 Drehimpuls des starren Körpers

Wir untersuchen nun, wie sich der Drehimpuls des starren Körpers beim Übergang vom raumfesten Bezugssystem S zum körperfesten Bezugssystem S' verändert. Im raumfesten Bezugssystem S gilt

$$\vec{L}(t) = \sum_i m_i \vec{r}_i(t) \times \dot{\vec{r}}_i(t) \,. \tag{14.38}$$

Einsetzen von (14.1) und (14.4) in (14.38) führt dann auf

$$\begin{aligned} \vec{L}(t) &= \sum_i m_i \vec{R}(t) \times \dot{\vec{R}}(t) + \left[\sum_i m_i \vec{r}_i'(t)\right] \times \dot{\vec{R}}(t) + \vec{R}(t) \times \left\{\vec{\Omega}(t) \times \left[\sum_i m_i \vec{r}_i'(t)\right]\right\} \\ &\quad + \sum_i m_i \vec{r}_i'(t) \times \left[\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}_i'(t)\right] \,. \end{aligned} \tag{14.39}$$

Der zweite und der dritte Term verschwinden, wenn $\sum_i m_i \vec{r}_i' = \vec{0}$ ist, d.h. wenn der Ursprung von S' mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfällt. Dann entspricht der erste Term gerade dem Drehimpuls $\vec{L}_M$ des Schwerpunktes bezüglich des Ursprungs von S und der vierte Term stellt den Drehimpuls $\vec{L}'(t)$ des starren Körpers bezüglich des Ursprunges von S' dar, so daß wir die Zerlegung

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_M + \vec{L}'(t) \tag{14.40}$$

erhalten. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes des zweifachen Vektorproduktes (1.44) läßt sich der Drehimpuls $\vec{L}'(t)$ genauer untersuchen:

$$\vec{L}'(t) = \sum_i m_i \left\{\vec{\Omega}(t)\vec{r}_i'(t)^2 - \vec{r}_i' \left[\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{r}_i'(t)\right]\right\} \,. \tag{14.41}$$

Setzt man die Zerlegungen (13.21) und (14.2) von $\vec{\Omega}(t)$ und $\vec{r}_i'(t)$ bezüglich des körperfesten Bezugssystems S' in (14.41) ein, so folgt

$$\vec{L}'(t) = \sum_i m_i \left\{ \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right) \begin{pmatrix} \Omega_1'(t) \\ \Omega_2'(t) \\ \Omega_3'(t) \end{pmatrix} \right. \tag{14.42}$$

$$\left. - \left[\Omega_1'(t)x_i' + \Omega_2'(t)y_i' + \Omega_3'(t)z_i'\right] \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} \right\} \,. \tag{14.43}$$

Mit Hilfe des Trägheitstensors (14.12) geht (14.42) über in

$$\vec{L}'(t) = \Theta' \vec{\Omega}(t) \,. \tag{14.44}$$

Demnach ist die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}'(t)$ im allgemeinen verschieden von der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$.

14.5 Hauptachsentransformation

Die konkreten Werte Θ_{jk}' des Hauptträgheitstensors (14.12) hängen von der Orientierung des körperfesten Bezugssystems S' ab. Wir führen nun eine Transformation zu einem neuen körperfesten Bezugssystem S'' durch, das der Symmetrie des starren Körpers angepaßt ist und den Hauptträgheitstensor Θ' vereinfacht. Hierzu transformieren wir erneut die Basisvektoren

$$\vec{e}_j''(t) = D_{jk} \vec{e}_k'(t) \tag{14.45}$$

mit einer zeitunabhängigen, aber orthonormalen Transformationsmatrix

$$D_{jl}D_{kl} = \delta_{jk} \quad \Longleftrightarrow \quad DD^{\mathsf{T}} = I\,. \tag{14.46}$$

Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bedeutet dies

$$\vec{\Omega}(t) \;=\; \Omega'_k(t)\vec{e}\,'_k(t) = \Omega''_j(t)\vec{e}\,''_j(t) \overset{(14.45)}{=} \Omega''_j(t)D_{jk}\vec{e}\,'_k(t)\,, \tag{14.47}$$

so daß sich die Winkelgeschwindigkeit wie ein Tensor erster Stufe transformiert:

$$\Omega'_j(t) \;=\; \Omega''_k(t)D_{kj}\,. \tag{14.48}$$

Für die kinetische Rotationsenergie erhalten wir entsprechend

$$T' \overset{(14.11)}{=} \frac{1}{2}\Theta'_{jk}\Omega'_j(t)\Omega'_k(t) \overset{(14.48)}{=} \frac{1}{2}\Theta'_{jk}\Omega''_l(t)D_{lj}\Omega''_m(t)D_{mk} = \frac{1}{2}\Theta''_{lm}\Omega''_l(t)\Omega''_m(t) = T''\,, \tag{14.49}$$

so daß sich der Hauptträgheitstensor wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert

$$\Theta''_{jk} = \Theta'_{lm}D_{jl}D_{km} \quad \Longleftrightarrow \quad \Theta'' = D\Theta'D^{\mathsf{T}}\,. \tag{14.50}$$

Wir bestimmen nun die Eigenwerte Θ und die Eigenvektoren $\vec{v}$ des Hauptträgheitstensors:

$$(\Theta' - \Theta I)\,\vec{v} = \vec{0}\,. \tag{14.51}$$

Die charakteristische Gleichung

$$\det(\Theta' - \Theta I) = 0 \tag{14.52}$$

führt nach dem Fundamentalsatz der Algebra von Gauß auf drei komplexe Lösungen Θ_1,Θ_2,Θ_3. Da der Hauptträgheitstensor nach (14.12) symmetrisch ist, sind diese Eigenwerte Θ_1,Θ_2,Θ_3 und damit auch die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$ reell. Aus der Positivität der Rotationsenergie (14.11) folgt ferner, daß der Hauptträgheitstensor (14.12) positiv definit ist, so daß die Eigenwerte Θ_1,Θ_2,Θ_3 nur positiv sein können. Man bezeichnet sie als Hauptträgheitsmomente, die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$ als Hauptträgheitsachsen und das neue körperfeste Bezugssystem S'' als Hauptachsensystem. Die Eigenvektoren $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$ bilden ein Orthonormalsystem (vgl. Abschnitt 11.3):

$$\vec{v}_j^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_k = \delta_{jk}\,. \tag{14.53}$$

Wir verwenden nun die Eigenvektoren $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$ als Zeilen- bzw. von D bzw. D^{T}:

$$D = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}} \end{pmatrix}\,, \quad D^{\mathsf{T}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\,. \tag{14.54}$$

Dann folgt die Orthonormalität (14.46) der Transformationsmatrix D aus der Orthonormalität der Eigenvektoren $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$:

$$DD^{\mathsf{T}} \overset{(14.54)}{=} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}} \end{pmatrix} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \end{pmatrix} \overset{(14.53)}{=} I\,. \tag{14.55}$$

Der transformierte Hauptträgheitstensor ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Theta'' &\overset{(14.50),(14.54)}{=} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}} \end{pmatrix} \Theta'(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}} \end{pmatrix} (\Theta'\vec{v}_1, \Theta'\vec{v}_2, \Theta'\vec{v}_3) \\ &\overset{(14.51)}{=} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_2^{\,\mathsf{T}} \\ \vec{v}_3^{\,\mathsf{T}} \end{pmatrix} (\Theta_1\vec{v}_1, \Theta_2\vec{v}_2, \Theta_3\vec{v}_3) \\ &= \begin{pmatrix} \Theta_1\vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \Theta_2\vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \Theta_3\vec{v}_1^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \\ \Theta_1\vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \Theta_2\vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \Theta_3\vec{v}_2^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \\ \Theta_1\vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_1 & \Theta_2\vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_2 & \Theta_3\vec{v}_3^{\,\mathsf{T}}\vec{v}_3 \end{pmatrix} \overset{(14.53)}{=} \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}\,, \end{aligned} \tag{14.56}$$

so daß er eine Diagonalgestalt mit den Hauptträgheitsmomenten als Diagonalelementen besitzt. Die Rotationsenergie (14.49) lautet damit

$$T'' = \frac{1}{2}\left[\Theta_1 \Omega_1''(t)^2 + \Theta_2 \Omega_2''(t)^2 + \Theta_3 \Omega_3''(t)^2\right] . \tag{14.57}$$

Wir transformieren nun auch den Drehimpuls in das Hauptachsensystem. Hierzu müssen wir (14.48) und eine analoge Transformation des Drehimpulses

$$L_j'(t) = L_k''(t) D_{kj} \tag{14.58}$$

in (14.44) einsetzen:

$$L_k''(t) D_{kj} = \Theta_{jk}' \Omega_l''(t) D_{lk} \implies D_{mj} D_{kj} L_k''(t) = D_{mj} \Theta_{jk}' D_{lk} \Omega_l''(t) . \tag{14.59}$$

Mit (14.46) und (14.50) folgt dann

$$L_j''(t) = \Theta_{jk}'' \Omega_k''(t) . \tag{14.60}$$

Verwenden wir die Diagonalgestalt (14.56) des Hauptträgheitstensors im Hauptachsensystem S'', so folgt

$$L_j''(t) = \Theta_j \Omega_j''(t) , \tag{14.61}$$

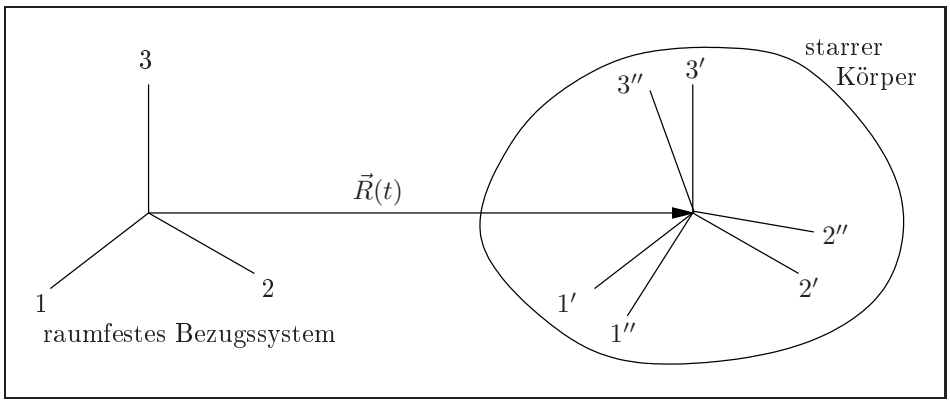
wobei hier über die doppelt auftretenden Indizes auf der rechten Seite nicht zu summieren ist. Zeigt die Winkelgeschwindigkeit in Richtung einer der drei Hauptträgheitsachsen des starren Körpers, so zeigt auch der Drehimpuls in diese Richtung.

Kapitel 15

Dynamik des starren Körpers

Die Dynamik des starren Körpers wird durch die Euler-Gleichungen für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem bestimmt. Wir lösen die Euler-Gleichungen zunächst für die Rotation um freie Achsen und für die kräftefreie Rotation des symmetrischen Kreisels. Anschließend führen wir die Euler-Winkel ein, um die Euler-Gleichungen für den schweren symmetrischen Kreisel zu lösen.

15.1 Euler-Gleichungen



Wir fassen zusammen, wie die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers in verschiedenen Bezugssystemen lauten. In Abschnitt 10.3 wurde gezeigt, daß der Drehimpuls $\vec{L}$ und das Drehmoment $\vec{M}^{(a)}$ der äußeren Kräfte im raumfesten Bezugssystem S der Beziehung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(a)} \tag{15.1}$$

genügen. In Abschnitt 10.4 wurde (15.1) in ein Bezugssystem S' transformiert, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfällt und dessen Koordinatenachsen parallel zu denen des raumfesten Bezugssystems S sind:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(a)} \,. \tag{15.2}$$

Nun gehen wir zum Bezugssystem S'' über, dessen Ursprung auch im Schwerpunkt des starren Körpers liegt, dessen Koordinatenachsen aber körperfest sind und in Richtung der Hauptträgheitsachsen zeigen. Bei der Transformation von S' nach S'' müssen wir für die Zeitableitung die

Substitutionsregel (13.36) anwenden:

$$\frac{d\vec{L}''}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L}'' = \vec{M}''^{(a)} \,. \tag{15.3}$$

Hierbei besteht zwischen den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}''$ und denen des Drehimpulses $\vec{L}''$ die Beziehung (14.61). Damit lauten die Bewegungsgleichungen (15.3):

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\Omega}_1''(t) + (\Theta_3 - \Theta_2)\Omega_2''(t)\Omega_3''(t) &= M_1''^{(a)}(t) \,, \\ \Theta_2 \dot{\Omega}_2''(t) + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3''(t)\Omega_1''(t) &= M_2''^{(a)}(t) \,, \\ \Theta_3 \dot{\Omega}_3''(t) + (\Theta_2 - \Theta_1)\Omega_1''(t)\Omega_2''(t) &= M_3''^{(a)}(t) \,. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Diese Euler-Gleichungen des starren Körpers legen die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem S'' fest. Es handelt sich um drei nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung für die Winkelgeschwindigkeiten $\Omega_1''(t), \Omega_2''(t), \Omega_3''(t)$. Durch die Wahl des Hauptachsensystems S'' hat man den Vorteil, daß die Hauptträgheitsmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ zeitunabhängig sind, dafür aber den Nachteil, daß die Komponenten $M_1''^{(a)}(t), M_2''^{(a)}(t), M_3''^{(a)}(t)$ des Drehmomentes der äußeren Kräfte im Hauptachsensystem unter Umständen eine komplizierte Zeitabhängigkeit erfahren, die von der Bewegung des Körpers abhängt. Deshalb beschränken wir uns im folgenden zunächst auf die kräfte- und damit momentenfreie Rotation des starren Körpers. Näherungsweise kann man z.B. die rotierende Erde als einen starren Körper ansehen, auf den kein äußeres Drehmoment wirkt. Für einen Kreisel im Schwerefeld kann dies dadurch verwirklicht werden, daß man den Schwerpunkt als Unterstützungspunkt nimmt. Für die Einschränkung

$$M_1''^{(a)}(t) = M_2''^{(a)}(t) = M_3''^{(a)}(t) = 0 \tag{15.5}$$

vereinfachen sich die Euler-Gleichungen (15.4) zu

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\Omega}_1''(t) + (\Theta_3 - \Theta_2)\Omega_2''(t)\Omega_3''(t) &= 0 \,, \\ \Theta_2 \dot{\Omega}_2''(t) + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3''(t)\Omega_1''(t) &= 0 \,, \\ \Theta_3 \dot{\Omega}_3''(t) + (\Theta_2 - \Theta_1)\Omega_1''(t)\Omega_2''(t) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{15.6}$$

15.2 Rotation um freie Achsen

Eine kräftefreie Translationsbewegung ist gleichförmig, sie erfolgt also mit einer konstanten Geschwindigkeit. Wir wollen untersuchen, ob die Euler-Gleichungen im kräftefreien Fall auch durch eine konstante Winkelgeschwindigkeit zu lösen sind. Wir schreiben dazu die kräftefreien Euler-Gleichungen (15.6) für eine konstante Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_1''(t) = \Omega_1'' \,, \quad \Omega_2''(t) = \Omega_2'' \,, \quad \Omega_3''(t) = \Omega_3'' \tag{15.7}$$

an und erhalten

$$(\Theta_3 - \Theta_2)\Omega_2''\Omega_3'' = (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3''\Omega_1'' = (\Theta_2 - \Theta_1)\Omega_1''\Omega_2'' = 0 \,. \tag{15.8}$$

Wir setzen voraus, daß alle drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden sind:

$$\Theta_i \neq \Theta_j, \quad i \neq j \,. \tag{15.9}$$

Dann besitzt (15.8) die folgende nichttriviale Lösung

$$\Omega_1'' \neq 0, \quad \Omega_2'' = \Omega_3'' = 0 \,. \tag{15.10}$$

Durch Vertauschung der Komponenten ergeben sich noch zwei weitere, analoge Lösungen, wobei aber immer zwei der drei Komponenten verschwinden müssen. $(\Omega_1'', \Omega_2'', \Omega_3'') \neq (0,0,0)$ ist also im

allgemeinen keine Lösung der kräftefreien Euler-Gleichungen.

Die Bewegungsgleichungen (15.6) lassen drei Lösungen der Art (15.10) zu. Wir zeigen, daß nur zwei dieser Lösungen stabil sind. Dazu betrachten wir eine Bewegung, die nur geringfügig von (15.10) abweicht:

$$\Omega_1''(t) = \Omega_1'' + \delta\Omega_1''(t), \quad \Omega_2''(t) = \delta\Omega_2''(t), \quad \Omega_3''(t) = \delta\Omega_3''(t)\,. \tag{15.11}$$

Beim Einsetzen von (15.11) in die kräftefreien Euler-Gleichungen (15.6) vernachlässigen wir alle Terme, die in den Abweichungen $\delta\Omega_1''(t), \delta\Omega_2''(t), \delta\Omega_3''(t)$ quadratisch sind und erhalten

$$\Theta_1\delta\dot{\Omega}_1''(t) = 0\,, \tag{15.12}$$
$$\Theta_2\delta\dot{\Omega}_2''(t) + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_1''\delta\Omega_3''(t) = 0\,, \tag{15.13}$$
$$\Theta_3\delta\dot{\Omega}_3''(t) + (\Theta_2 - \Theta_1)\Omega_1''\delta\Omega_2''(t) = 0\,. \tag{15.14}$$

Aus (15.12) folgt zunächst

$$\delta\Omega_1''(t) = \delta\Omega_1''\,. \tag{15.15}$$

Differenziert man (15.13) bezüglich der Zeit t und setzt man darin (15.14) ein, so erhält man

$$\delta\ddot{\Omega}_2''(t) + \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}\Omega_1''^2\delta\Omega_2''(t) = 0\,. \tag{15.16}$$

Hierbei sind nun zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

- Das Hauptträgheitsmoment Θ_1 ist das größte oder das kleinste der drei Hauptträgheitsmomente. Dann besitzt (15.16) die Lösung

$$\delta\Omega_2''(t) = A\cos\left[\sqrt{\frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}}\Omega_1''t\right] + B\sin\left[\sqrt{\frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}}\Omega_1''t\right]\,, \tag{15.17}$$

  d.h. die kleinen Abweichungen oszillieren um die Lösung (15.10).

- Das Hauptträgheitsmoment Θ_1 ist das mittlere der drei Hauptträgheitsmomente. Dann lautet die Lösung von (15.16)

$$\delta\Omega_2''(t) = A\exp\left[\sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}}\Omega_1''t\right] + B\exp\left[-\sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\Theta_3}}\Omega_1''t\right]\,, \tag{15.18}$$

  d.h. die ursprünglich kleinen Abweichungen wachsen exponentiell an.

Die freie Rotation um die Hauptträgheitsachse mit dem größten oder dem kleinsten Hauptträgheitsmoment ist also in dem Sinne stabil, daß kleine Abweichungen auch klein bleiben. Die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ist dagegen nicht stabil, da kleine Abweichungen davon schnell anwachsen.

15.3 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Wir untersuchen nun die kräftefreie Rotation für den symmetrischen Kreisel. Für die Hauptträgheitsmomente eines solchen Körpers gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Einschränkung

$$\Theta_1 = \Theta_2\,. \tag{15.19}$$

Man unterscheidet dabei weiter:

- $\Theta_3 > \Theta_1$: oblater Kreisel, z.B. eine Scheibe,
- $\Theta_3 < \Theta_1$: prolater Kreisel, z.B. ein Zylinder,
- $\Theta_3 = \Theta_1$: Kugelkreisel, z.B. ein Würfel.

Symmetrische Kreisel sind insbesondere starre Körper, die rotationssymmetrisch bezüglich einer Achse sind. Für (15.19) ist dies die x_3''-Achse, die dann auch Figurenachse genannt wird. Durch die Einschränkung (15.19) gehen die kräftefreien Euler-Gleichungen (15.6) über in

$$\Theta_1\dot{\Omega}_1''(t) + (\Theta_3 - \Theta_1)\Omega_2''(t)\Omega_3''(t) = 0\,, \tag{15.20}$$
$$\Theta_1\dot{\Omega}_2''(t) + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3''(t)\Omega_1''(t) = 0\,, \tag{15.21}$$
$$\Theta_3\dot{\Omega}_3''(t) = 0\,. \tag{15.22}$$

Aus (15.22) folgt sofort

$$\Omega_3''(t) = \Omega_3''\,. \tag{15.23}$$

Differenzieren wir (15.20) bezüglich der Zeit t und setzen wir darin (15.21), so erhalten wir mit (15.23)

$$\ddot{\Omega}_1''(t) + \left(\frac{(\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3''}{\Theta_1}\right)^2 \Omega_1''(t) = 0\,. \tag{15.24}$$

Die allgemeine Lösung von (15.24) lautet

$$\Omega_1''(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{15.25}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{|\Theta_3 - \Theta_1|}{\Theta_1}\Omega_3''\,. \tag{15.26}$$

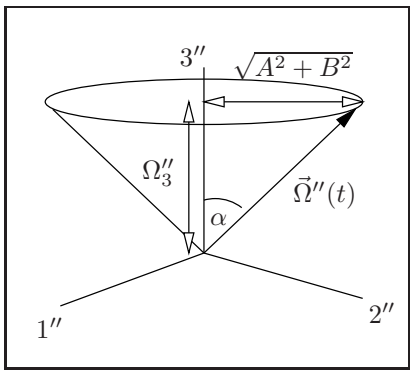
Dann ist durch (15.20) und (15.23) auch $\Omega_2''(t)$ festgelegt:

$$\Omega_2''(t) = \frac{\operatorname{sgn}(\Theta_1 - \Theta_3)}{\omega_N}\dot{\Omega}_1''(t) \overset{(15.25)}{=} \operatorname{sgn}(\Theta_1 - \Theta_3)\,(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\,. \tag{15.27}$$

Wir halten fest, daß der Betrag der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem konstant ist:

$$\Omega_1''^2(t) + \Omega_2''^2(t) + \Omega_3''^2(t) \overset{(15.23),(15.25),(15.27)}{=\!=} A^2 + B^2 + \Omega_3''^2\,. \tag{15.28}$$

Die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die x_1'', x_2''-Ebene hat die konstante Länge $\sqrt{A^2+B^2}$ und rotiert mit der Kreisfrequenz (15.26). Damit bewegt sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}''(t)$ im Hauptachsensystem auf einem Kreiskegel, der Polkegel genannt wird:



Der Öffnungswinkel des Polkegels

$$\alpha = \sphericalangle\left[\vec{\Omega}''(t),\, \vec{e}_3'\,(t)\right] = \arctan\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\Omega_3''} \tag{15.29}$$

ist zeitlich konstant. Wir betrachten als Beispiel die Erde und vernachlässigen das Drehmoment, das durch das Gravitationsfeld der Sonne verursacht wird. Die Erde kann näherungsweise als ein homogenes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = b = 6378$ km zum Äquator und $c = 6357$ km zum Pol aufgefaßt werden. Nach Abschnitt 14.3 lauten dann die Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2), \quad \Theta_3 = \frac{2}{5}Ma^2\,, \tag{15.30}$$

so daß sich die relative Abweichung der Hauptträgheitsmomente ergibt zu

$$\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{6378^2 - 6357^2}{6378^2 + 6357^2} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{303}\,. \tag{15.31}$$

Damit besagt (15.26), daß bei der Erdrotation die Drehachse um die Figurenachse mit einer Periode von 303 Tagen wandert. Dieses theoretische Ergebnis weicht stark von der tatsächlich gemessenen „Chandlerschen Periode“ von 433 Tagen ab. Diese Abweichung ist wesentlich darin begründet, daß die Erde kein starrer Körper ist. Man stellt experimentell fest, daß der Öffnungskegel des Polkegels der Erde etwa $\alpha = 0{,}3''$ beträgt. Der Durchstoßpunkt der Drehachse auf der Erdoberfläche hat damit den Abstand

$$l \approx c\alpha = 6375 \cdot 10^3\mathrm{m} \cdot \frac{2\pi \cdot 0{,}3}{360 \cdot 3600} = 9{,}2\,\mathrm{m} \tag{15.32}$$

von der Figurenachse.

Für den Drehimpuls $\vec{L}''(t)$ gilt aufgrund von (14.61), (15.19) und (15.23), (15.25), (15.27):

$$\begin{aligned} L_1''(t) &= \Theta_1 \left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)\,, \\ L_2''(t) &= \Theta_1 \mathrm{sgn}\left(\Theta_1 - \Theta_3\right)\left(-A\sin\omega t + B\cos\omega t\right)\,, \\ L_3''(t) &= \Theta_3\Omega_3''\,. \end{aligned} \tag{15.33}$$

Damit rotiert auch der Drehimpuls $\vec{L}''(t)$ mit der Kreisfrequenz (15.26) auf einem Kreiskegel, es liegt aber eine andere Amplitude vor. Der Öffnungswinkel dieses Kreiskegels lautet

$$\beta = \sphericalangle\left[\vec{L}''(t),\, \vec{e}_3'\,(t)\right] = \arctan\frac{\Theta_1\sqrt{A^2 + B^2}}{\Theta_3\Omega_3''}\,. \tag{15.34}$$

Die relative Lage der Vektoren $\vec{\Omega}''(t)$ und $\vec{L}''(t)$ wird demnach durch die Hauptträgheitsmomente Θ_1 und Θ_3 bestimmt:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \overset{(15.29),(15.34)}{=} \frac{\Theta_3}{\Theta_1}\,. \tag{15.35}$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- oblater Kreisel ($\Theta_3 > \Theta_1$): $\alpha > \beta$,
- prolater Kreisel ($\Theta_3 < \Theta_1$): $\alpha < \beta$,
- Kugelkreisel ($\Theta_3 = \Theta_1$): $\alpha = \beta$ mit $\omega = 0$.

Die relative Lage der drei Vektoren $\vec{L}''(t)$, $\Omega''(t)$ und $\vec{e}_3''(t)$ läßt sich folgendermaßen weiter charakterisieren. Die Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem kann gemäß

$$\vec{\Omega}''(t) = \vec{\Omega}_\perp''(t) + \vec{\Omega}_\parallel(t) \tag{15.36}$$

in einen Anteil senkrecht zur Figurenachse

$$\vec{\Omega}_\perp''(t) = \Omega_1''(t)\vec{e}_1''(t) + \Omega_2''(t)\vec{e}_2''(t) \tag{15.37}$$

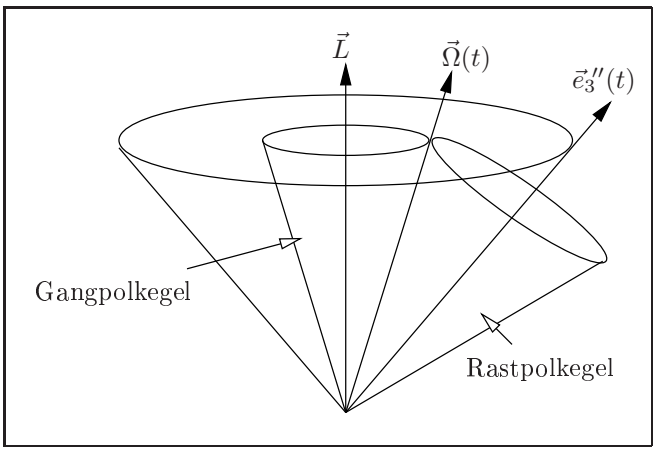
und einen Anteil parallel zur Figurenachse

$$\vec{\Omega}''_{\parallel}(t) = \Omega''_3 \vec{e}_3''(t) \tag{15.38}$$

zerlegt werden. Für den Drehimpuls gilt dann aufgrund von (15.23), (15.25), (15.27) und (15.33) eine entsprechende Zerlegung

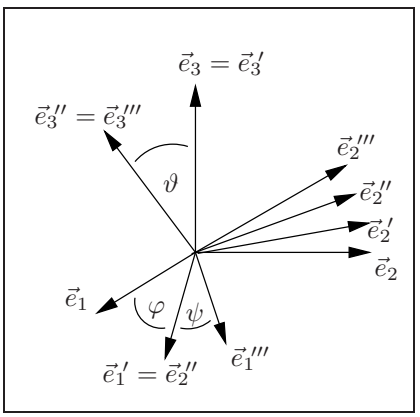
$$\vec{L}''(t) = \Theta_1 \vec{\Omega}''_{\perp}(t) + \Theta_3 \vec{\Omega}''_{\parallel}(t)\,. \tag{15.39}$$

Damit liegen die Vektoren $\vec{L}''(t), \vec{\Omega}''(t)$ und $\vec{e}_3''(t)$ stets in der von $\vec{\Omega}_{\perp}(t)$ und $\vec{\Omega}_{\parallel}(t)$ aufgespannten Ebene. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn wir vom körperfesten Hauptachsensystem S'' zum raumfesten Bezugssystem S zurückkehren. Da aber der Drehimpuls $\vec{L}$ des kräftefreien Kreisels im raumfesten Bezugssystem S zeitlich konstant ist, läuft die Bewegung so ab, daß Drehachse $\vec{\Omega}(t)$ und Figurenachse $\vec{e}_3''(t)$ auf Kegeln um ihn umlaufen. Dabei rollt der Gangpolkegel auf dem Rastpolkegel ab:



15.4 Euler-Winkel

Die Lage des körperfesten Hauptachsensystems gegenüber dem raumfesten Bezugssystem wird durch die Angabe dreier Winkel bestimmt. Die Euler-Winkel φ, ϑ, ψ sind so definiert, daß drei hintereinander ausgeführte Drehungen das raumfeste Bezugssystem in das körperfeste Hauptachsensystem überführen:



Zunächst wird eine Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse mit dem Winkel φ durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{15.40}$$

Anschließend erfolgt ein Drehung um die $\vec{e}_1{}'$-Achse mit dem Winkel ϑ:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}'' \\ \vec{e}_2{}'' \\ \vec{e}_3{}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_3{}' \end{pmatrix} . \tag{15.41}$$

Schließlich wird noch eine Drehung um die $\vec{e}_3{}''$-Achse mit dem Winkel ψ vollzogen:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}''' \\ \vec{e}_2{}''' \\ \vec{e}_3{}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}'' \\ \vec{e}_2{}'' \\ \vec{e}_3{}'' \end{pmatrix} . \tag{15.42}$$

Damit erhalten wir insgesamt die Transformation

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}''' \\ \vec{e}_2{}''' \\ \vec{e}_3{}''' \end{pmatrix} = R(\varphi,\vartheta,\psi) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} , \tag{15.43}$$

wobei die dabei auftretende Transformationsmatrix $R(\varphi,\vartheta,\psi)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} R(\varphi,\vartheta,\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{15.44}$$

Die einzelnen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Hauptachsensystem ergeben sich aus (13.15) und (13.20). Die erste Komponente lautet

$$\begin{aligned} &\Omega_1''' = -\Omega_{23}''' = -R_{2k}\dot{R}_{3k} = -R_{21}\dot{R}_{31} - R_{22}\dot{R}_{32} - R_{23}\dot{R}_{33} \\ &= (\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi)(\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi) \\ &\quad + (\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi)(-\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi) + \dot{\vartheta}\cos\psi\sin\vartheta^2 \\ &= \dot{\vartheta}(\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \cos\psi\cos^2\vartheta\sin^2\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \cos\psi\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \cos\psi\sin^2\vartheta) \\ &\quad + \dot{\varphi}(\sin\psi\sin\vartheta\cos^2\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\sin^2\varphi - \cos\psi\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi) \\ &= \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta . \end{aligned} \tag{15.45}$$

Entsprechend ergibt sich die zweite Komponente zu

$$\begin{aligned} \Omega_2''' &= \Omega_{13}''' = R_{1k}\dot{R}_{3k} = R_{11}\dot{R}_{31} + R_{12}\dot{R}_{32} + R_{13}\dot{R}_{33} \\ &= (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi)(\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi) \\ &\quad + (\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi)(-\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi) - \dot{\vartheta}\sin\psi\sin^2\vartheta \\ &= \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\psi . \end{aligned} \tag{15.46}$$

Schließlich erhalten wir für die dritte Komponente nach einer etwas umfangreichen, aber nicht schwierigen Rechnung:

$$\begin{aligned} &\Omega_3''' = \Omega_{21}''' = R_{2k}\dot{R}_{1k} = R_{21}\dot{R}_{11} + R_{22}\dot{R}_{12} + R_{23}\dot{R}_{13} \\ &= (-\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi) \\ &\quad \times(-\dot{\psi}\sin\psi\cos\varphi - \dot{\psi}\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - \dot{\varphi}\sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi) \\ &\quad + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi) \\ &\quad \times(-\dot{\psi}\sin\psi\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi) \\ &\quad + \cos\psi\sin\vartheta(\dot{\psi}\cos\psi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\sin\psi\cos\vartheta) \\ &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta . \end{aligned} \tag{15.47}$$

Nach (1.48) und (1.52) ergeben sich die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Bezugssystem:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = R^{\mathsf{T}}(\varphi,\vartheta,\psi) \begin{pmatrix} \Omega_1''' \\ \Omega_2''' \\ \Omega_3''' \end{pmatrix} \overset{(15.44)-(15.47)}{=\!=}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

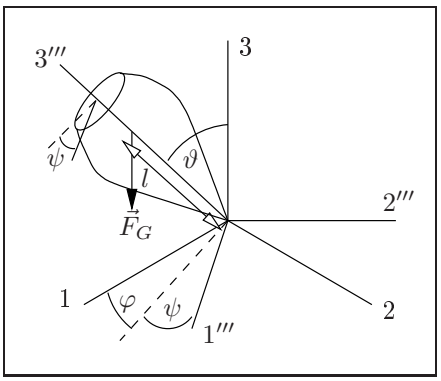
$$\cdot \begin{pmatrix} \dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\vartheta \\ \dot\varphi\cos\psi\sin\vartheta - \dot\vartheta\sin\psi \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi \\ -\dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \dot\vartheta\sin\varphi \\ \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi \end{pmatrix} . \tag{15.48}$$

Mit Hilfe der Euler-Winkel werden wir nun die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels beschreiben.

15.5 Schwerer symmetrischer Kreisel

Als weiteres Beispiel für die Anwendung der Methoden der Dynamik starrer Körper betrachten wir die Bewegung eines symmetrischen Kreisels, der sich in einem Gravitationsfeld befindet und von dem ein Punkt auf der Symmetrieachse im Raum fixiert ist. Einen solchen schweren symmetrischen Kreisel bezeichnet man als Lagrange-Kreisel. Eine Vielzahl physikalischer Systeme vom Kinderkreisel bis zu komplizierten gyroskopischen Navigationsinstrumenten werden durch einen solchen schweren symmetrischen Kreisel näherungsweise beschrieben. Sowohl wegen seiner praktischen Anwendungen als auch wegen der Illustration für viele der früher entwickelten Verfahren verdient die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels eine ausführliche Erörterung.

Die Symmetrieachse ist natürlich eine der Hauptträgheitsachsen und soll als die $\vec{e}_3'''$-Achse des körperfesten Bezugssystems gewählt werden. Da der Kreisel in einem Punkt unterstützt wird, wird die Konfiguration des schweren Kreisels durch die Euler-Winkel vollständig beschrieben. ϑ gibt die Neigung der $\vec{e}_3'''$-Achse gegen die vertikale $\vec{e}_3$-Achse, φ mißt den Azimut des Kreisels um die vertikale $\vec{e}_3$-Achse und ψ ist der Drehwinkel des Kreisels um seine eigene Achse (siehe auch die Skizze zur Einführung der Euler-Winkel im vorangegangenen Abschnitt 15.4):



Bezeichnet l den Abstand zwischen Schwerpunkt und Unterstützungspunkt des Kreisels, so lautet der Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\vec{r}_S = l\,\vec{e}_3''' . \tag{15.49}$$

Besitzt der Kreisel die Masse m, so greift im Schwerpunkt die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = -mg\,\vec{e}_3 \tag{15.50}$$

an. Demnach wirkt auf den schweren Kreisel das äußere Drehmoment

$$\vec{M}^{(a)} = \vec{r}_S \times \vec{F}_G \overset{(15.49),(15.50)}{=} mgl\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_3''' \,. \tag{15.51}$$

Aus der Invertierung von (15.43) liest man nun ab

$$\vec{e}_3 = R_{13}\vec{e}_1''' + R_{23}\vec{e}_2''' + R_{33}\vec{e}_3''' \overset{(15.44)}{=} \sin\psi\sin\vartheta\vec{e}_1''' + \cos\psi\sin\vartheta\vec{e}_2''' + \cos\vartheta\vec{e}_3''' \,, \tag{15.52}$$

so daß sich das äußere Drehmoment im Hauptachsensystem S''' berechnen läßt:

$$\begin{aligned} \vec{D}^{(a)} &\overset{(15.51),(15.52)}{=} mgl(\sin\psi\sin\vartheta\,\vec{e}_1''' \times \vec{e}_3''' + \cos\psi\sin\vartheta\,\vec{e}_2''' \times \vec{e}_3''') \\ &\overset{(1.20)}{=} mgl(\cos\psi\sin\vartheta\,\vec{e}_1''' - \sin\psi\sin\vartheta\,\vec{e}_2''') \,. \end{aligned} \tag{15.53}$$

Die Euler-Gleichungen (15.4) für den schweren symmetrischen Kreisel lauten mit $\Theta_1 = \Theta_2$ und (15.53)

$$\Theta_1\dot{\Omega}_1'''(t) + (\Theta_3 - \Theta_1)\Omega_2'''(t)\Omega_3'''(t) = mgl\cos\psi\sin\vartheta \,, \tag{15.54}$$

$$\Theta_1\dot{\Omega}_2'''(t) + (\Theta_1 - \Theta_3)\Omega_3'''(t)\Omega_1'''(t) = -mgl\sin\psi\sin\vartheta \,, \tag{15.55}$$

$$\Theta_3\dot{\Omega}_3'''(t) = 0 \,. \tag{15.56}$$

Hierbei lassen sich die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem S''' gemäß (15.45)–(15.47) in Abhängigkeit der Euler-Winkel ausdrücken. Der schwere symmetrische Kreisel besitzt drei Integrale der Bewegung. Aus (15.51) folgt zunächst, daß das äußere Drehmoment $\vec{D}^{(a)}$ senkrecht auf $\vec{e}_3$ und $\vec{e}_3'''$ steht. Es ist demnach anzunehmen, daß die Projektionen des Drehimpulses auf $\vec{e}_3$ und $\vec{e}_3'''$ zeitlich konstant sind. Tatsächlich folgt aus (15.56) unmittelbar

$$L_3''' \overset{(14.61)}{=} \Theta_3\Omega_3''' \overset{(15.47)}{=} \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta) = \text{konstant.} \tag{15.57}$$

Für die anderen Komponenten des Drehimpulses gilt im Hauptachsensystem mit $\Theta_1 = \Theta_2$

$$L_1''' \overset{(14.61)}{=} \Theta_1\Omega_1''' \overset{(15.45)}{=} \Theta_1(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\psi) \,, \tag{15.58}$$

$$L_2''' \overset{(14.61)}{=\!=} \Theta_1\Omega_2''' \overset{(15.46)}{=} \Theta_1(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\psi) \,. \tag{15.59}$$

Damit ergibt sich der Drehimpuls in Richtung der vertikalen $\vec{e}_3$-Achse

$$L_3 \overset{(1.52)}{=} L_1'''R_{13} + L_2'''R_{23} + L_3'''R_{33} \tag{15.60}$$

unter Verwendung von (15.44) und (15.57)–(15.59) zu

$$\begin{aligned} L_3 &= \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)\cos\vartheta + \Theta_1(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\psi)\sin\psi\sin\vartheta \\ &\quad + \Theta_1(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\psi)\cos\psi\sin\vartheta \\ &= \dot{\varphi}(\Theta_1\sin^2\vartheta + \Theta_3\cos^2\vartheta) + \dot{\psi}\Theta_3\cos\vartheta \,. \end{aligned} \tag{15.61}$$

Wir zeigen nun, daß L_3 tatsächlich ein Integral der Bewegung darstellt. Hierzu berechnen wir $\sin\vartheta\sin\psi\cdot(15.54) + \sin\vartheta\cos\psi\cdot(15.55)$:

$$\begin{aligned} &\Theta_1\sin\vartheta(\sin\psi\dot{\Omega}_1''' + \cos\psi\dot{\Omega}_2''') + (\Theta_3 - \Theta_1)\sin\vartheta\Omega_3'''(\sin\psi\Omega_2''' - \cos\psi\Omega_1''') \\ &= \frac{d}{dt}\left[\Theta_1\sin\vartheta(\sin\psi\Omega_1''' + \cos\psi\Omega_2''')\right] - \Theta_1\dot{\vartheta}\cos\vartheta(\sin\psi\Omega_1''' + \cos\psi\Omega_2''') \\ &\quad -\Theta_1\dot{\psi}\sin\vartheta(\cos\psi\Omega_1''' - \sin\psi\Omega_2''') + (\Theta_1 - \Theta_3)\sin\vartheta\Omega_3'''(\cos\psi\Omega_1''' - \sin\psi\Omega_2''') \\ &\equiv 0 \,. \end{aligned} \tag{15.62}$$

Ferner lesen wir aus (15.45) und (15.46) ab

$$\begin{aligned} \sin\psi\Omega_1''' + \cos\psi\Omega_2''' &= \dot\varphi\sin\vartheta, && (15.63)\\ \cos\psi\Omega_1''' - \sin\psi\Omega_2''' &= \dot\vartheta\,, && (15.64)\end{aligned}$$

so daß sich (15.62) mit (15.47) reduziert auf

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta\right) - \Theta_1\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \Theta_1\dot\psi\dot\vartheta\sin\vartheta + (\Theta_1-\Theta_3)\sin\vartheta\dot\vartheta(\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta)\\ &\quad= \frac{d}{dt}\left(\Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta\right) - \Theta_3\sin\vartheta\dot\vartheta\dot\psi - \Theta_3\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0\,. \qquad (15.65)\end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Drehimpulskomponente (15.61) formen wir (15.65) um:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta + \Theta_3\cos^2\vartheta + \Theta_3\dot\psi\cos\vartheta\right) - \Theta_3\ddot\varphi\cos\psi\cos\vartheta + 2\Theta_3\dot\varphi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\\ &\quad -\Theta_3\ddot\psi\cos\vartheta + \Theta_3\dot\psi\dot\vartheta\sin\vartheta - \Theta_3\sin\vartheta\dot\vartheta\dot\psi - \Theta_3\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0\,. \qquad (15.66)\end{aligned}$$

Aus (15.57) und (15.61) folgt demnach

$$\frac{dL_3}{dt} - \cos\vartheta\frac{dL_3'''}{dt} = 0\,, \qquad (15.67)$$

so daß sich mit (15.57) ergibt

$$\frac{dL_3}{dt} = 0 \quad\Rightarrow\quad L_3 = \text{konstant}\,. \qquad (15.68)$$

Da die Gravitationskraft auf dem schweren symmetrischen Kreisel nicht explizit zeitabhängig ist, erwarten wir, daß auch noch die Energie ein Integral der Bewegung darstellt. Multiplizieren wir (15.54) bis (15.56) jeweils mit $\Omega_1''', \Omega_2''', \Omega_3'''$ und addieren wir die einzelnen Therme, so folgt auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \Theta_1\Omega_1'''\dot\Omega_1''' + \Theta_1\Omega_2'''\dot\Omega_2''' + \Theta_3\Omega_3'''\dot\Omega_3''' &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\Theta_1(\Omega_1'''^2 + \Omega_2'''^2) + \frac{1}{2}\Theta_3\Omega_3'''^2\right]\\ &\overset{(15.45)-(15.47)}{=\!=} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\Theta_1(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta)^2\right] \qquad (15.69)\end{aligned}$$

und entsprechend auf der rechten Seite

$$mgl\left(\Omega_1'''\cos\psi\sin\vartheta - \Omega_2'''\sin\psi\sin\vartheta\right) \overset{(15.45),(15.46)}{=} mgl\dot\vartheta\sin\vartheta = \frac{d}{dt}\left(-mgl\cos\vartheta\right)\,. \qquad (15.70)$$

Insgesamt ergibt sich insgesamt der Energieerhaltungssatz:

$$E = \frac{1}{2}\Theta_1(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta)^2 + mgl\cos\vartheta = \text{konstant}\,. \qquad (15.71)$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die explizite Form der Bewegungsgleichungen für die Euler-Winkel an. Aus $\sin\psi\cdot(15.54) + \cos\psi\cdot(15.55)$ folgt mit (15.45) und (15.46)

$$\begin{aligned} &\Theta_1\big[\sin\psi(\ddot\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\dot\psi\sin\psi + \ddot\varphi\sin\psi\sin\vartheta + \dot\varphi\dot\psi\cos\psi\sin\vartheta + \dot\varphi\dot\vartheta\sin\psi\sin\vartheta)\\ &+\cos\psi(-\ddot\vartheta\sin\psi - \dot\vartheta\dot\psi\cos\psi + \ddot\varphi\cos\psi\sin\vartheta - \dot\varphi\dot\psi\sin\psi\sin\vartheta + \dot\varphi\dot\vartheta\cos\psi\cos\vartheta)\big]\\ &+(\Theta_1-\Theta_3)\Omega_3'''(\cos\psi\Omega_1''' - \sin\psi\Omega_2''')\\ &\overset{(15.47),(15.64)}{=} \Theta_1\big(-\dot\vartheta\dot\psi + \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta\big) - (\Theta_1-\Theta_3)\dot\vartheta(\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta) = 0\,, \qquad (15.72)\end{aligned}$$

so daß sich ergibt

$$\Theta_1(\ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta) - \Theta_3(\dot\psi\dot\vartheta + \dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta) = 0\,. \qquad (15.73)$$

Entsprechend folgt aus $\cos\psi\cdot(15.54)-\sin\psi\cdot(15.55)$ mit (15.45) und (15.46)

$$\begin{aligned}&\Theta_1\big[\cos\psi(\ddot\vartheta\cos\psi-\dot\vartheta\dot\psi\sin\psi+\ddot\varphi\sin\psi\sin\vartheta+\dot\varphi\dot\psi\cos\psi\sin\vartheta+\dot\varphi\dot\vartheta\sin\psi\cos\vartheta)\\&-\sin\psi(-\ddot\vartheta\sin\psi-\dot\vartheta\dot\psi\cos\psi+\ddot\varphi\cos\psi\sin\vartheta-\dot\varphi\dot\psi\sin\psi\sin\vartheta+\dot\varphi\dot\vartheta\cos\psi\cos\vartheta)\big]\\&+(\Theta_3-\Theta_1)\Omega_3'''(\sin\psi\Omega_1'''+\cos\psi\Omega_2''')\\&\overset{(15.47),(15.63)}{=}\quad\Theta_1\big(\ddot\vartheta+\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta\big)+(\Theta_3-\Theta_1)\dot\varphi\sin\vartheta(\dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta)\cancel{=mgl}\sin\vartheta\,.\end{aligned}\tag{15.74}$$

Außerdem folgt aus (15.46) und (15.56) unmittelbar

$$\Theta_3(\ddot\psi+\ddot\varphi\cos\vartheta-\dot\varphi\dot\vartheta\sin\vartheta)=0\,.\tag{15.75}$$

Wir kehren nun wieder zu den drei Integralen der Bewegung (15.57), (15.61), (15.71) zurück. Nach (15.57) und (15.61) lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi,\dot\psi$ eindeutig durch die Drehimpulse L_3''' und L_3 ausdrücken. Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}L_3'''\\L_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta_3\cos\vartheta & \Theta_3\\ \Theta_1\sin^2\vartheta+\Theta_3\cos^2\vartheta & \Theta_3\cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi\\\dot\psi\end{pmatrix}\tag{15.76}$$

läßt sich mit Hilfe von (4.56) invertieren

$$\begin{pmatrix}\dot\varphi\\\dot\psi\end{pmatrix}=\frac{1}{\Theta_1\Theta_3\sin^2\vartheta}\begin{pmatrix}\Theta_3\cos\vartheta & -\Theta_3\\ -\Theta_1\sin^2\vartheta-\Theta_3\cos^2\vartheta & \Theta_3\cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_3'''\\L_3\end{pmatrix},\tag{15.77}$$

so daß wir erhalten

$$\dot\varphi=\frac{L_3'''\cos\vartheta-L_3}{\Theta_1\sin^2\vartheta}\,,\tag{15.78}$$

$$\dot\psi=\frac{\Theta_3\cos\vartheta L_3-(\Theta_1\sin^2\vartheta+\Theta_3\cos^2\vartheta)L_3'''}{\Theta_1\Theta_3\sin^2\vartheta}\,.\tag{15.79}$$

Einsetzen von (15.78) und (15.79) in (15.71) führt auf

$$E=\frac12\Theta_1\dot\vartheta^2+\frac12\Theta_1\sin^2\vartheta\frac{(L_3'''\cos\vartheta-L_3)^2}{\Theta_1^2\sin^4\vartheta}+\frac12\Theta_3\frac{L_3'''^2}{\Theta_3^2}+mgl\cos\vartheta\,.\tag{15.80}$$

Demnach ist der Energieerhaltungssatz analog zur Bewegung eines Teilchens in einer einzelnen Dimension

$$E=\frac12\Theta_1\dot\vartheta^2+U_{\rm eff}(\vartheta)\,,\tag{15.81}$$

wobei das effektive Potential

$$U_{\rm eff}(\vartheta)=mgl\cos\vartheta+\frac{L_3'''^2}{2\Theta_3}+\frac{(L_3'''\cos\vartheta-L_3)^2}{2\Theta_1\sin^2\vartheta}\tag{15.82}$$

auftritt. Bei einer vorgegebenen Energie E schränkt das effektive Potential $U_{\rm eff}(\vartheta)$ die möglichen ϑ-Werte auf ein Intervall $[\vartheta_1,\vartheta_2]$ ein. Die Funktion $\vartheta(t)$ ergibt sich aus (15.81) durch Separation der Variablen

$$\dot\vartheta=\frac{d\vartheta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\Theta_1}[E-U_{\rm eff}(\vartheta)]}\quad\Rightarrow\quad t-t_0=\pm\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{\Theta_1}[E-U_{\rm eff}(\vartheta)]}}.\tag{15.83}$$

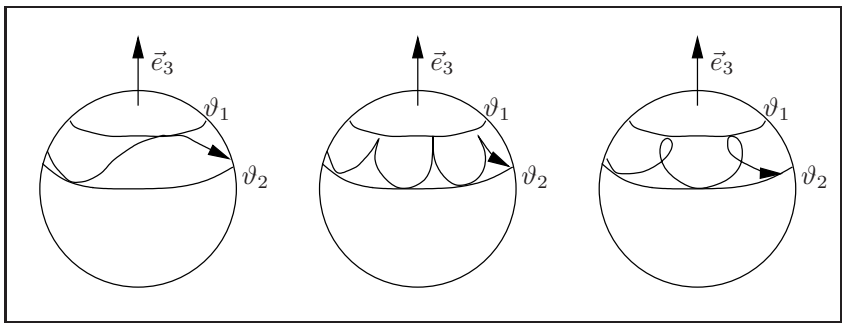
Ist die Funktion $\vartheta(t)$ bekannt, so ergeben sich durch Integration von (15.78) und (15.79) die beiden anderen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$:

$$\varphi(t)-\varphi_0=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{L_3'''\cos\vartheta(t')-L_3}{\Theta_1\sin^2\vartheta(t')}dt',\tag{15.84}$$

$$\psi(t)-\psi_0=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\Theta_3L_3\cos\vartheta(t')-L_3'''[\Theta_1\sin^2\vartheta(t')+\Theta_3\cos^2\vartheta(t')]}{\Theta_1\Theta_3\sin^2\vartheta(t')}\,.\tag{15.85}$$

Dabei beschreibt die Funktion $\vartheta(t)$ das „Nicken“ der Figurenachse gegenüber der raumfesten $\vec{e}_3$-Achse, was man als Nutation bezeichnet. Außerdem beschreibt $\varphi(t)$ die Drehung der Figurenachse $\vec{e}_3'''$ um die raumfeste $\vec{e}_3$-Achse, was man als Präzession bezeichnet, und $\psi(t)$ beschreibt die eigentliche Kreiseldrehung.

Es ist üblich, die Bewegung des Kreisels dadurch zu beschreiben, daß man die Schnittkurve der Figurenachse auf einer Einheitskugel um den Unterstützungspunkt aufträgt. Diese Kurve wird der Locus der Figurenachse genannt. Die Polarkoordinaten eines Punktes auf dem Locus sind mit den Eulerwinkeln ϑ und φ identisch. Die Überlagerung von Nutation und Präzession führt zu den folgenden möglichen Gestalten des Locus:



Teil II

Analytische Mechanik

Der erste Teil der Vorlesung befaßte sich mit den Gesetzmäßigkeiten der Bewegung materieller Körper. Dabei wurden die zugrunde liegenden Newtonschen Axiome formuliert und deren Konsequenzen anhand einiger wichtiger mechanischer Systeme diskutiert. Im zweiten Teil der Vorlesung wird die Beschreibung mechanischer Systeme auf formaler Ebene weiterentwickelt. Dabei werden andere Formulierungen der Mechanik untersucht, die zwar zur Newtonschen Mechanik äquivalent sind, die aber eine tiefere Einsicht in die analytische Struktur der Mechanik eröffnen. Diese anderen Formulierungen der Mechanik sind zur Beschreibung und zur Lösung vieler mechanischer Systeme nützlich. Ihre eigentliche Bedeutung besteht aber darin, daß sie eine wesentliche formale Voraussetzung für die Entwicklung anderer Bereiche der Theoretischen Physik darstellen. Dies gilt insbesondere für die Hydrodynamik, die Kontinuumsmechanik, die Statistischen Mechanik und vor allem die Quantenmechanik. Wir gehen im einzelnen wie folgt vor:

- In der Lagrangeschen Mechanik untersuchen wir, wie die Newtonsche Mechanik zu modifizieren ist, um mechanische Systeme mit Zwangsbedingungen zu beschreiben. Abhängig davon, ob man an den dabei wirkenden Zwangskräften interessiert ist oder nicht, führt dies auf die Lagrange-Gleichungen erster oder zweiter Art.

- Eine Einführung in die Variationsrechnung zeigt, daß sich die Lagrange-Gleichungen zweiter Art auch über ein Variationsprinzip ergeben. Dabei werden wir auf das Noether-Theorem stoßen, das einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den Symmetrien und den Erhaltungsgrößen eines mechanischen Systems darstellt.

- Während in der Lagrangeschen Mechanik nur die Koordinaten als unabhängige Variablen angesehen werden, sind dies in der Hamiltonschen Mechanik sowohl die Koordinaten als auch die Impulse. Dies führt auf die Hamilton-Gleichungen, die unter kanonische Transformationen zwischen den Koordinaten und den Impulsen forminvariant sind.

- In der Hamilton-Jacobi-Theorie wird ein effizientes Verfahren entwickelt, mit dem sich die Frequenzen periodischer Bewegungen berechnen lassen, ohne daß die konkrete Gestalt der Bahnen besimmt werden muß.

Kapitel 16

Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Für viele mechanische Systeme sind die Newtonschen Axiome nicht unmittelbar anwendbar, da Zwangsbedingungen zu Zwangskräften führen, die die Newtonschen Bewegungsgleichungen modifizieren. Das Problem besteht darin, daß wir in der Regel die Zwangsbedingungen nicht aber die Zwangskräfte explizit angeben können, da die letzteren von der tatsächlichen Bewegung abhängen. In diesem Kapitel geben wir ein allgemeines Verfahren an, durch das die Zwangskräfte bei gegebenen Zwangsbedingungen bestimmt werden können.

16.1 D'Alembert-Prinzip ohne Zwangsbedingungen

Wir beginnen damit, daß wir die Bewegung eines Massenpunktes m unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $\vec{F}$ betrachten. Die Newtonsche Bewegungsgleichung für dessen Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit den Komponenten $x_i = x_i(t),\ i = 1, 2, 3$ lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\ddot{x}_i = F_i\,. \tag{16.1}$$

Wir führen nun virtuelle Verrückungen δx_i^v der Koordinaten x_i ein, bei denen sich die Kräfte, denen das System unterliegt, nicht ändern. Virtuelle Verrückungen bewirken demnach, daß eine kinematisch mögliche Bahn in eine andere überführt wird. Bei dem hier betrachteten Fall eines Massenpunktes, der nur einer äußeren Kraft $\vec{F}$ ausgesetzt ist, ist die virtuelle Verrückung δx_i^v mit einer völlig beliebigen Verrückung δx_i identisch:

$$\delta x_i^v = \delta x_i; \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{16.2}$$

Wir untersuchen später den schwierigeren Fall, daß ein Massenpunkt außerdem noch Zwangsbedingungen unterworfen ist. Bewegt sich der Massenpunkt beispielsweise auf einer Fläche, dann gilt (16.2) nicht mehr, da nur solche virtuellen Verrückungen zugelassen sind, die das Teilchen auf dieser Fläche belassen.

Aus (16.1) und (16.2) lesen wir ab

$$\sum_{i=1}^{3}(m\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0\,, \tag{16.3}$$

was sich im statischen Fall reduziert auf

$$\sum_{i=1}^{3} F_i \delta x_i = 0\,. \tag{16.4}$$

Dabei besagt (16.4), daß die äußere Kraft im statischen Gleichgewicht bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit verrichtet. Man bezeichnet (16.4) deshalb auch als das Prinzip der virtuellen Arbeit. Demgegenüber besagt (16.3), daß im dynamischen Gleichgewicht die Summe aus der äußeren Kraft F_i und der Trägheitskraft $-m\ddot{x}_i$ bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit verrichtet. Aus diesem d'Alembert-Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt natürlich umgekehrt die Newtonsche Bewegungsgleichung (16.1), da (16.3) für alle beliebigen virtuellen Verrückungen δx_i gelten soll.

16.2 D'Alembert-Prinzip mit Zwangsbedingungen

Wir untersuchen nun, wie das d'Alembert-Prinzip modifiziert wird, wenn sich der Massenpunkt auf einer fixierten Fläche bewegt, die durch die Gleichung

$$G(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{16.5}$$

beschrieben wird. Die Koordinaten des Massenpunktes müssen dann diese Gleichung zu jedem Zeitpunkt erfüllen. Die Fläche übt eine Zwangskraft $\vec{Z}$ auf den Massenpunkt aus, damit dieser auf der Fläche bleibt und verändert damit die Newtonsche Bewegungsgleichung (16.1) zu

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}\,. \tag{16.6}$$

Da die Zwangskraft $\vec{Z}$ nicht innerhalb der Fläche G wirken kann, muß sie senkrecht auf ihr stehen. Wir differenzieren (16.5) bezüglich der Zeit t und wenden die Kettenregel an:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} G = 0\,. \tag{16.7}$$

Wir sehen, daß auch $\vec{\nabla}G$ senkrecht auf der Fläche G steht, da $d\vec{r}$ eine Verschiebung innerhalb der Fläche darstellt. Zwangskraft $\vec{Z}$ und $\vec{\nabla}G$ sind somit proportional zueinander

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} G\,, \tag{16.8}$$

wobei $\lambda = \lambda(\vec{r}, t)$ die Proportionalitätskonstante darstellt. Demnach werden die vier Funktionen $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \lambda(\vec{r}, t)$ aus der Zwangsbedingung (16.5) und der aus (16.6) und (16.8) resultierenden Newtonschen Bewegungsgleichung, d.h.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \vec{\nabla} G\,, \tag{16.9}$$

bestimmt.

Da die virtuellen Verrückungen δx_i^v eine kinematisch mögliche Bahn in eine andere überführen sollen, sind sie im Falle der Zwangsbedingung (16.5) nicht mehr durch (16.2) gegeben. Die virtuellen Verrückungen δx_i^v müssen in der Fläche G liegen, d.h. es muß analog zu (16.7) gelten

$$\sum_{i=1}^{3} \nabla_i G\, \delta x_i^v = 0\,, \tag{16.10}$$

so daß mit (16.8) folgt

$$\sum_{i=1}^{3} Z_i \delta x_i^v = 0\,. \tag{16.11}$$

Demnach verrichten die Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit. Aus (16.9) und (16.10) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3} (m\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i^v = 0\,, \tag{16.12}$$

d.h. auch bei Anwesenheit der Zwangsbedingung verrichtet die Summe aus der äußeren Kraft F_i und der Trägheitskraft $-m\ddot{x}_i$ bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit. Die Zwangskraft tritt in (16.12) nur indirekt in Erscheinung, da die virtuellen Verrückungen δx_i^v nicht beliebig sind, sondern der Zwangsbedingung (16.10) unterworfen sind.

16.3 Klassifikation von Zwangsbedingungen

Eine Zwangsbedingung der Form (16.5), bei der eine Einschränkung für die Koordinaten in Form einer impliziten Gleichung vorliegt, heißt holonom. Alle anderen Zwangsbedingungen heißen nichtholonom. Ist beispielsweise ein Massenpunkt dadurch in seiner Bewegung eingeschränkt, daß er sich im Inneren einer Kugel mit Radius R aufhalten muß, gilt die Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0\,. \tag{16.13}$$

Hierbei handelt es sich um eine nichtholonome Zwangsbedingung, da die Einschränkung für die Koordinaten durch eine Ungleichung gegeben ist. Zwangsbedingungen können aber auch in einer differentiellen Form

$$g_x(x,y,z)dx + g_y(x,y,z)dy + g_z(x,y,z)dz = 0 \tag{16.14}$$

vorliegen. Hierbei müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Wenn die linke Seite von (16.14) das vollständige Differential einer Funktion $G = G(x,y,z)$ darstellt, dann können wir (16.14) sofort integrieren und erhalten eine Gleichung von der Form (16.5). In diesem Fall ist die Zwangsbedingung (16.14) holonom. Ist die linke Seite von (16.14) kein vollständiges Differential, so kann sie erst integriert werden, wenn das Problem schon gelöst ist. Die Zwangsbedingung (16.14) ist dann nichtholonom. Aus der Forderung, daß die linke Seite von (16.14) ein vollständiges Differential sein soll, können wir ein Kriterium für die Holonomität differentieller Zwangsbedingungen (16.14) angeben. Es muß nämlich gelten

$$dG = g_x dx + g_y dy + g_z dz\,, \tag{16.15}$$

d.h. die Funktionen g_x, g_y, g_z stimmen mit den partiellen Ableitungen von G nach x, y, z überein:

$$g_x = \frac{\partial G}{\partial x}\,, \quad g_y = \frac{\partial G}{\partial y}\,, \quad g_z = \frac{\partial G}{\partial z}\,. \tag{16.16}$$

Nach dem Satz von Schwarz sind bei einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion G die gemischten zweiten partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}\,, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}\,, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}\,. \tag{16.17}$$

Setzt man (16.16) in (16.17) ein, so folgt

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial g_z}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z}\,. \tag{16.18}$$

Demnach ist die Zwangsbedingung (16.14) holonom, wenn die Integrabilitätsbedingungen (16.18) erfüllt sind, andernfalls ist sie nichtholonom. Beispielsweise stellt ein Rad, das ohne zu rutschen auf einer Ebene rollt, eine nichtholonome Zwangsbedingung dar.

Eine weitere Unterscheidung der Zwangsbedingungen wird nach ihrer Zeitabhängigkeit vorgenommen. Ist die Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so heißt sie rheonom, tritt die Zeit nicht explizit auf, nennen wir die Zwangsbedingung skleronom. Beispielsweise handelt es sich bei (16.5) um eine skleronome, holonome Zwangsbedingung, während ein mathematisches Pendel mit periodisch veränderter Fadenlänge eine rheonome, holonome Zwangsbedingung darstellt.

16.4 Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir betrachten N Massenpunkte mit den Massen $m_1, \ldots, m_N$ und den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{3N}$ (vgl. Notation in Abschnitt 11.1) und nehmen an, daß L rheonome, holonome Zwangsbedingungen

$$G^{(l)}(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0\,; \quad l = 1, \ldots, L \tag{16.19}$$

vorliegen. Analog zur Diskussion einer einzelnen skleronomen, holonomen Zwangsbedingung in Abschnitt 16.2 lauten dann die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_i\ddot{x}_i = F_i + \sum_{l=1}^{L} Z_i^{(l)}\,, \tag{16.20}$$

wobei $Z_i^{(l)}$ die Zwangskraft der l-ten Zwangsbedingung für die i-te Koordinate darstellt. Analog zu (16.8) ist diese Zwangskraft $Z_i^{(l)}$ durch

$$Z_i^{(l)} = \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i} \tag{16.21}$$

gegeben, wobei $\lambda^{(l)} = \lambda^{(l)}(x_1, \ldots, x_{3N}, t)$ die Proportionalitätskonstante darstellt. Demnach sind die $3N + L$ Funktionen $x_1, \ldots, x_{3N}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(L)}$ aus den L Zwangsbedingungen (16.19) und den aus (16.20) und (16.21) resultierenden $3N$ Newtonschen Bewegungsgleichungen, d.h. den Lagrange-Gleichungen erster Art

$$m_i\ddot{x}_i = F_i + \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i}\,, \tag{16.22}$$

zu bestimmen.

Für die virtuellen Verrückungen δx_i^v gilt analog zu (16.11)

$$\sum_{i=1}^{3N} Z_i^{(l)} \delta x_i^v = 0\,, \tag{16.23}$$

so daß die Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten. Somit folgt aus (16.22) und (16.23) das d'Alembert-Prinzip der virtuellen Verrückung

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i^v = 0\,. \tag{16.24}$$

16.5 Energiesatz

Wir nehmen nun an, daß die äußeren Kräfte F_i konservativ sind, so daß sie sich als Gradient eines Potentials $U = U(x_1, \ldots, x_{3N}, t)$ darstellen lassen:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\,. \tag{16.25}$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (16.22) lauten dann

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i}\,. \tag{16.26}$$

Eine Multiplikation mit $\dot{x}_i$ und eine Summation über alle $i = 1, \ldots, 3N$ führt dann auf

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\ddot{x}_i = -\sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3N}\sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i}\dot{x}_i\,. \tag{16.27}$$

Betrachten wir als Nebenrechnung die Differentiation der Zwangsbedingungen (16.19) bezüglich der Zeit t

$$\frac{dG^{(l)}}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial G^{(l)}}{\partial t} = 0\,, \tag{16.28}$$

so ergibt eine Multiplikation mit $\lambda^{(l)}$ und eine Summation über alle $l = 1, \ldots, L$

$$\sum_{i=1}^{3N} \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial t} \,. \tag{16.29}$$

Entsprechend gilt für das Potential U

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial t} \,. \tag{16.30}$$

Einsetzen von (16.29) und (16.30) in (16.27) führt auf den Energiesatz

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)} \frac{\partial G^{(l)}}{\partial t} \,, \tag{16.31}$$

wobei die kinetische Energie T gegeben ist durch

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 . \tag{16.32}$$

Der Energiesatz (16.31) geht demnach in den Energieerhaltungssatz über, wenn das Potential U nicht explizit zeitabhängig ist

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{16.33}$$

und wenn die holonomen Zwangsbedingungen (16.19) skleronom sind

$$\frac{\partial G^{(l)}}{\partial t} = 0 \,. \tag{16.34}$$

16.6 Lösungsverfahren

Zur Lösung eines mechanischen Problems mit rheonomen, holonomen Zwangsbedingungen kann man folgendermaßen vorgehen. Zunächst werden die Zwangsbedingungen (16.19) formuliert und die Lagrange-Gleichungen erster Art (16.22) aufgestellt. Anschließend werden die Proportionalitätskonstanten $\lambda^{(l)}$ eliminiert. Hierzu bildet man von den holonomen Zwangsbedingungen (16.19) die zweifache Zeitableitung

$$\frac{d^2 G^{(l)}}{dt^2} = 0 \,. \tag{16.35}$$

Hierbei entstehen Gleichungen, in denen die Beschleunigungen $\ddot{x}_i$ nur linear vorkommen

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G^{(l)}(x,t)}{\partial x_i} \ddot{x}_i = g^{(l)}(x, \dot{x}, t) \,, \tag{16.36}$$

wobei die rechte Seite gemäß

$$g^{(l)}(x, \dot{x}, t) = - \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 G^{(l)}(x,t)}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_i \dot{x}_j - 2 \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial^2 G^{(l)}(x,t)}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i - \frac{\partial^2 G^{(l)}(x,t)}{\partial t^2} \tag{16.37}$$

abhängt von

$$x = (x_1, \ldots, x_{3N}), \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N}) \tag{16.38}$$

und von t. Für die Beschleunigungen $\ddot{x}_i$ in (16.36) setzen wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen (16.22) ein:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G^{(l)}(x,t)}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \left[F_i(x,\dot{x},t) + \sum_{k=1}^{L} \lambda^{(k)}(x,\dot{x},t) \frac{\partial G^{(k)}(x,t)}{\partial x_i} \right] = g^{(l)}(x,\dot{x},t)\,. \tag{16.39}$$

Hierbei handelt es sich um eine lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die Proportionalitätskonstanten $\lambda^{(l)}$, dessen Koeffizienten von x, $\dot{x}$ und t, aber nicht mehr von $\ddot{x}$ abhängen. Die Anzahl der Gleichungen (16.39) ist mit der Anzahl der Unbekannten $\lambda^{(l)}$ identisch, so daß wir daraus die Proportionalitätskonstanten bestimmen können

$$\lambda^{(l)} = \lambda^{(l)}(x,\dot{x},t)\,; \quad l = 1,\ldots,L\,. \tag{16.40}$$

Die so berechneten $\lambda^{(l)}$ werden dann in die rechte Seite von (16.22) eingesetzt, so daß wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{x}_i = \tilde{F}_i(x,\dot{x},t) \tag{16.41}$$

mit den Kräften

$$\tilde{F}_i(x,\dot{x},t) = F_i(x,\dot{x},t) + \sum_{l=1}^{L} \lambda^{(l)}(x,\dot{x},t) \frac{\partial G^{(l)}(x,t)}{\partial x_i} \tag{16.42}$$

erhalten. Sie werden mit den üblichen Verfahren gelöst, wobei die dabei auftretenden Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen

$$x_i(0) = x_{i\,0}\,, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_{i\,0} \tag{16.43}$$

festgelegt werden. Dabei ist zu beachten, daß diese Anfangsbedingungen (16.43) nicht beliebig gewählt werden können, da auch sie den Zwangsbedingungen (16.19) und derem totalen Differential bezüglich der Zeit (16.28) genügen müssen:

$$\begin{aligned} G^{(l)}(x_{1\,0},\ldots,x_{3N\,0},0) &= 0\,; \quad l = 1,\ldots,L\,, \\ \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G^{(l)}(x_{1\,0},\ldots,x_{3N\,0},0)}{\partial x_{i\,0}} \dot{x}_{i\,0} + \left.\frac{\partial G^{(l)}(x_{1\,0},\ldots,x_{3N\,0},t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0\,; \quad l = 1,\ldots,L\,. \end{aligned} \tag{16.44}$$

Setzt man die Lösungen von (16.41)-(16.43) in (16.21) und (16.40) ein, so können die Zwangskräfte berechnet werden. In der 21. Übungsaufgabe ist dieses Lösungsverfahren für die Lagrange-Gleichungen erster Art am Beispiele eines Massenpunktes auf einer Achterbahn zu diskutieren.

16.7 Schiefe Ebene

Wir betrachten als Beispiel einen Massenpunkt m, der unter dem Einfluß der Gewichtskraft eine schiefe Ebene mit dem Winkel α zur Horizontalen reibungsfrei hinuntergleitet. Die Koordinaten x und y des Massenpunktes m genügen für alle Zeiten der Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}\,. \tag{16.45}$$

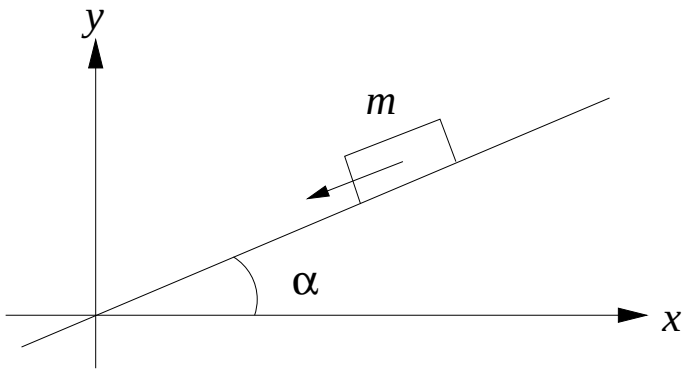
Es liegt demnach die skleronome, holonome Zwangsbedingung

$$G(x,y) = y - x\tan\alpha = 0 \tag{16.46}$$

vor. Die Lagrange-Gleichungen erster Art (16.22) lauten für dieses Problem

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x} \overset{(16.46)}{=} -\lambda\tan\alpha\,, \tag{16.47}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} \overset{(16.46)}{=} -mg + \lambda\,. \tag{16.48}$$



Zur Lösung dieser Bewegungsgleichungen müssen wir zunächst den Parameter λ eliminieren. Hierzu bilden wir gemäß (16.35) die zweifache Zeitableitung der holonomen Zwangsbedingung (16.46):

$$\ddot{y} - \ddot{x}\tan\alpha = 0\,. \tag{16.49}$$

Einsetzen von (16.47) und (16.48) in (16.49) führt auf eine Bestimmungsgleichung für den Parameter λ, aus der folgt:

$$\lambda = mg\cos^2\alpha\,. \tag{16.50}$$

Demnach lautet die Zwangskraft für dieses Problem:

$$Z_x = \lambda\frac{\partial G}{\partial x} \overset{(16.46)}{=} -\lambda\tan\alpha \overset{(16.50)}{=} -mg\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{16.51}$$

$$Z_y = \lambda\frac{\partial G}{\partial y} \overset{(16.46)}{=} \lambda \overset{(16.50)}{=} mg\cos^2\alpha\,. \tag{16.52}$$

Mit Hilfe von (16.50) gehen die Lagrange-Gleichungen erster Art (16.47) und (16.48) über in

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{16.53}$$

$$\ddot{y} = -g\sin^2\alpha\,. \tag{16.54}$$

Die allgemeine Lösung von (16.53) und (16.54) lautet

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{16.55}$$

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha\,. \tag{16.56}$$

Berücksichtigen wir, daß die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0\,, \tag{16.57}$$

$$y(0) = y_0\,, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \tag{16.58}$$

mit der holonomen Zwangsbedingung (16.46) kompatibel sein müssen, so folgen für sie die Einschränkungen

$$y_0 = x_0\tan\alpha\,, \quad \dot{y}_0 = \dot{x}_0\tan\alpha\,. \tag{16.59}$$

Das Hinuntergleiten des Massenpunktes auf der schiefen Ebene wird deshalb beschrieben durch (16.55) und

$$y(t) = x(t)\tan\alpha\,. \tag{16.60}$$

Kapitel 17

Lagrangesche Mechanik

Häufig ist man nicht an der Berechnung von Zwangskräften interessiert. Dann ist es wesentlich bequemer, eine Formulierung der Mechanik zu wählen, bei der die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Im folgenden werden wir sehen, daß diese Elimination der Zwangskräfte von den Lagrange-Gleichungen erster Art zu den Lagrange-Gleichungen zweiter Art führt.

17.1 Generalisierte Koordinaten

Bei $3N$ Koordinaten $x_1, \ldots, x_{3N}$ und L holonomen Zwangsbedingungen (16.19) sind nur

$$f = 3N - L \tag{17.1}$$

Koordinaten voneinander unabhängig. Wir nennen dies die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Wir wählen nun f geeignete generalisierte Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$, so daß diese die Lage der Massenpunkte festlegen

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_f, t)\,; \quad i = 1, \ldots, 3N \tag{17.2}$$

und die holonomen Zwangsbedingungen (16.19) identisch erfüllt sind

$$G^{(l)}\big(x_1(q_1, \ldots, q_f, t), \ldots, x_{3N}(q_1, \ldots, q_f, t), t\big) = 0\,; \quad l = 1, \ldots, L\,. \tag{17.3}$$

Als Beispiel betrachten wir die rheonome, holonome Zwangsbedingung, daß sich ein Massenpunkt auf der Oberfläche einer in z-Richtung beweglichen Kugel mit Radius R bewegt:

$$G(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + [z - s(t)]^2 - R^2 = 0\,. \tag{17.4}$$

Hierbei beschreibt die Funktion $s(t)$ die verschiebbare Position des Kugelmittelpunktes. Das System besitzt mit $N = 1$ und $L = 1$ gemäß (17.1) genau $f = 2$ generalisierte Koordinaten, die man mit den Winkeln $q_1 = \vartheta$ und $q_2 = \varphi$ identifizieren kann. Die Transformation (17.2) zwischen den kartesischen und den generalisierten Koordinaten lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} x(\vartheta, \varphi, t) &= R \sin\vartheta \cos\varphi\,, \\ y(\vartheta, \varphi, t) &= R \sin\vartheta \sin\varphi\,, \\ z(\vartheta, \varphi, t) &= R \cos\vartheta + s(t)\,. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Die Zwangsbedingung (17.4) ist mit der Identifikation (17.5) offensichtlich für alle möglichen Werte von ϑ und φ erfüllt:

$$G(x(\vartheta, \varphi, t), y(\vartheta, \varphi, t), z(\vartheta, \varphi, t), t) = R^2 \left(\sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \cos^2\vartheta - 1\right) \equiv 0\,. \tag{17.6}$$

Wir sehen an diesem Beispiel, daß die generalisierten Koordinaten nicht die Dimension einer Länge haben müssen.

17.2 Elimination der Zwangskräfte

Da die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ keinerlei Zwangsbedingungen unterworfen sind, sind deren virtuelle Verrückungen δq_ν^v mit völlig beliebigen Verrückungen δq_ν identisch (vgl. Abschnitt 16.1):

$$\delta q_\nu^v = \delta q_\nu \,; \quad \nu = 1, \ldots, f \,. \tag{17.7}$$

Hierbei verwenden wir die Konvention, daß lateinische Indizes $i, j, k, \ldots$ für die kartesischen Koordinaten und griechische Indizes $\nu, \mu, \lambda, \ldots$ für die generalisierten Koordinaten verwendet werden. Solch völlig beliebige virtuelle Verrückungen (17.7) der generalisierten Koordinaten führen aufgrund der Beziehung (17.2) zu virtuellen Verrückungen der kartesischen Koordinaten

$$\delta x_i^v = \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \,, \tag{17.8}$$

die mit den holonomen Zwangsbedingungen (16.19) verträglich sind. Wir untersuchen nun, wie sich das d'Alembert-Prinzip der virtuellen Verrückungen (16.24) durch den Übergang auf die generalisierten Koordinaten verändert. Hierzu betrachten wir zunächst die Arbeit, die von den äußeren Kräften F_i bei virtuellen Verrückungen verrichtet wird:

$$\delta A_1^v = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i^v \overset{(17.8)}{=} \sum_{i=1}^{3N} F_i \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \,. \tag{17.9}$$

Führt man die generalisierten Kräfte

$$F_\nu = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \tag{17.10}$$

ein, so vereinfacht sich (17.9) auf

$$\delta A_1^v = \sum_{\nu=1}^{f} F_\nu \delta q_\nu \,. \tag{17.11}$$

Entsprechend erhalten wir für die Arbeit, die von den Trägheitskräften $-m_i \ddot{x}_i$ bei virtuellen Verrückungen verrichtet wird:

$$\delta A_2^v = -\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i^v \overset{(17.8)}{=} -\sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{\nu=1}^{f} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu \,. \tag{17.12}$$

Als Nebenrechnung untersuchen wir den Ausdruck

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \,. \tag{17.13}$$

Einerseits erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_\nu} \,, \tag{17.14}$$

und andererseits gilt für die kartesischen Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_i \overset{(17.2)}{=} \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial x_i}{\partial t} \,, \tag{17.15}$$

so daß

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\nu \partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\nu \partial t} \,. \tag{17.16}$$

Gilt der Satz von Schwarz, so sind die gemischen zweiten partielle Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\nu \partial q_\mu}\,, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_\nu} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\nu \partial t}\,. \tag{17.17}$$

Deshalb folgt aus (17.14) und (17.16) die Identität

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\,, \tag{17.18}$$

d.h. die totale Ableitung nach t und die partielle Ableitung nach q_ν sind vertauschbar. Einsetzen von (17.18) in (17.13) führt auf

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\,, \tag{17.19}$$

so daß (17.12) übergeht in

$$\delta A_2^v = -\sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{\nu=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right)\delta q_\nu + \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{\nu=1}^{f} \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\delta q_\nu\,. \tag{17.20}$$

Das d'Alembert-Prinzip der virtuellen Verrückungen (16.24) geht mit (17.11) und (17.20) über in

$$\sum_{\nu=1}^{f}\left\{\sum_{i=1}^{3N}\left[m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\right] - F_\nu\right\}\delta q_\nu = 0\,. \tag{17.21}$$

Da die virtuellen Verrückungen (17.7) der generalisierten Koordinaten völlig beliebig sind, folgt aus (17.21)

$$\sum_{i=1}^{3N}\left[m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\right] = F_\nu\,. \tag{17.22}$$

Die beiden Terme auf der linken Seite von (17.22) lassen sich mit der kinetischen Energie (16.32) des Systems in Verbindung bringen. Differenziert man die kinetische Energie (16.32) nach den generalisierten Koordinaten q_ν, so erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\nu}\,, \tag{17.23}$$

während eine Differentiation nach den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ auf

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\nu} \tag{17.24}$$

führt. Da die kartesischen Geschwindigkeiten gemäß (17.15) nur linear von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ abhängen, gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\,, \tag{17.25}$$

so daß (17.24) übergeht in

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\,. \tag{17.26}$$

Wir setzen (17.23) und (17.26) in die Bewegungsgleichungen (17.22) ein und erhalten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = F_\nu\,. \tag{17.27}$$

17.3 Lagrange-Funktion

Wir nehmen an, daß es ein generalisiertes Potential $U = U(q, \dot{q}, t)$ als Funktion von

$$q = (q_1, \ldots, q_f), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f) \tag{17.28}$$

gibt, so daß sich die generalisierten Kräfte (17.10) ergeben als

$$F_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\,. \tag{17.29}$$

Dann folgt aus (17.27) und (17.29), daß die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t) \tag{17.30}$$

als Differenz von kinetischer Energie T und generalisiertem Potential U auf die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0 \tag{17.31}$$

führt. Die Anwendung der Kettenregel führt (17.29) über in

$$F_\nu = \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 U}{\partial q_\mu \partial \dot{q}_\nu}\dot{q}_\mu + \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_\mu \partial \dot{q}_\nu}\ddot{q}_\mu + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\,. \tag{17.32}$$

Da die äußeren Kräfte F_i nicht von den Beschleunigen $\ddot{x}_i$ abhängen, hängen die generalisierten Kräfte (17.10) gemäß (16.41), (16.42) und (17.2) nicht von den generalisierten Beschleunigungen $\ddot{q}_\nu$ ab. Deshalb folgt aus (17.32), daß das Potential U höchstens linear von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ abhängen darf:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_\mu \partial \dot{q}_\nu} = 0\,. \tag{17.33}$$

Das Potential U muß deshalb die Form

$$U(q, \dot{q}, t) = V(q, t) + \sum_{\mu=1}^{f} M_\mu(q, t)\dot{q}_\mu \tag{17.34}$$

besitzen. Einsetzen von (17.34) in (17.29) führt auf die generalisierten Kräfte

$$F_\nu = -\frac{\partial V}{\partial q_\nu} + \frac{\partial M_\nu}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial M_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial M_\mu}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\mu\,. \tag{17.35}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall einer einzelnen Punktmasse, bei der keine Zwangsbedingungen vorliegen, so daß die generalisierten mit den kartesischen Koordinaten übereinstimmen. Dann gehen die generalisierten Kräfte (17.35) in die äußere Kraft

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial M_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} - \frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)\dot{x}_j \tag{17.36}$$

über. Ist $M_i = 0$, so ist die äußere Kraft konservativ. Wir betrachten nun die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Ladung Q im elektromagnetischen Feld im SI-Einheitensystem

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \quad \Leftrightarrow \quad F_i = QE_i + Q\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{x}_j B_k\,. \tag{17.37}$$

Hierbei genügen die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{B}$ den vier Maxwell-Gleichungen. Sie bestehen aus den zwei homogenen Gleichungen

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \tag{17.38}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{17.39}$$

und den zwei inhomogenen Gleichungen

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\,, \tag{17.40}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0\,\vec{j} \tag{17.41}$$

mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\vec{j}$. Das elektromagnetische Feld kann aber auch mit Hilfe eines skalaren Potentials φ und eines Vektorpotentials $\vec{A}$ beschrieben werden. Aus (17.38) folgt nämlich

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\,, \tag{17.42}$$

so daß wir aus (17.39) ablesen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\,. \tag{17.43}$$

Einsetzen von (17.42) und (17.43) in (17.37) führt zunächst auf

$$F_i = -Q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - Q\frac{\partial A_i}{\partial t} + Q\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j\epsilon_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}\,. \tag{17.44}$$

Aus der Symmetrie (1.23) des Levi-Civitá-Tensors und der Kontraktionsregel (1.54) folgt dann

$$F_i = -Q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - Q\frac{\partial A_i}{\partial t} + Q\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j\,, \tag{17.45}$$

so daß der Vergleich mit (17.36) auf die Identifikation

$$V = Q\varphi\,, \quad M_i = -QA_i \tag{17.46}$$

führt. Nach (16.32), (17.34) und (17.46) lautet demnach die Lagrange-Funktion (17.30) eines geladenen nichtrelativistischen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(x,\dot{x},t) = \sum_{j=1}^{3}\frac{m}{2}\dot{x}_j^2 - Q\varphi(x,t) + Q\sum_{j=1}^{3}A_j(x,t)\dot{x}_j\,. \tag{17.47}$$

17.4 Eichtransformation

Die Lagrange-Funktion (17.30) wurde eingeführt, weil sie ein besonders einfacher Ausgangspunkt zur Aufstellung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art (17.31) ist. Wir zeigen nun, daß es verschiedene Lagrange-Funktionen geben kann, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Hierzu untersuchen wir die Transformation

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q,t)}{dt}\,, \tag{17.48}$$

wobei $F = F(q,t)$ eine beliebige Funktion darstellt, so daß

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial F(q,t)}{\partial q_\mu}\dot{q}_\mu + \frac{\partial F(q,t)}{\partial t}\,. \tag{17.49}$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion (17.48) nach den generalisierten Koordinaten

$$\frac{\partial L'}{\partial q_\nu} = \frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial q_\mu}\dot{q}_\mu + \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial t} \tag{17.50}$$

und nach den generalisierte Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial F}{\partial q_\nu} \tag{17.51}$$

führen schließlich zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L'}{\partial q_\nu} \overset{(17.50),(17.51)}{=} & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 F}{\partial q_\mu \partial q_\nu}\dot{q}_\mu + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_\nu} \\ & - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial q_\mu}\dot{q}_\mu - \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial t} \overset{(17.31)}{=} 0\,.\end{aligned} \tag{17.52}$$

Hierbei wurde wieder der Satz von Schwarz verwendet, daß man die gemischten zweiten partiellen Ableitungen bei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen vertauschen kann:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial q_\mu}\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_\nu}\,. \tag{17.53}$$

Man kann also die Lagrange-Funktion der mechanischen Eichtransformation (17.48) unterziehen, ohne daß sich die Bewegungsgleichungen ändern. Demnach sind alle durch (17.48) miteinander verbundenen Lagrange-Funktionen als gleichwertig anzusehen.

Die mechanische Eichtransformation hat einen Bezug zur elektromagnetischen Eichtransformation der Potentiale

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad A_i' = A_i + \frac{\partial \chi}{\partial x_i}\,, \tag{17.54}$$

unter der das elektrische und magnetische Feld in (17.43) und (17.42) invariant ist:

$$\vec{E}' = \vec{E}\,, \quad \vec{B}' = \vec{B}\,. \tag{17.55}$$

Hierbei stellt $\chi = \chi(x,t)$ eine beliebige Funktion dar. Betrachten wir die Lagrange-Funktion (17.47) eines geladenen nichtrelativistischen Teilchens im elektromagnetischen Feld, so führt eine elektromagentische Eichtransformation (17.54) zu einer mechanischen Eichtransformation (17.48), wobei der Zusammenhang zwischen den Eichfunktionen F und χ gegeben ist durch

$$F(x,t) = Q\chi(x,t)\,. \tag{17.56}$$

17.5 Punkttransformation

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art (17.31) besitzen neben der Invarianz unter einer mechanischen Eichtransformation (17.48) noch eine weitere Symmetrie . Hierzu untersuchen wir eine allgemeine Transformation der generalisierten Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_f)$ zu den neuen generalisierten Koordinaten $Q = Q(Q_1, \ldots, Q_f)$, die auch als Punkttransformation bezeichnet wird:

$$q_\nu = q_\nu(Q,t)\,; \quad \nu = 1, \ldots, f\,. \tag{17.57}$$

Die generalisierten Geschwindigkeiten transformieren sich dann gemäß

$$\dot{q}_\nu = \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial q_\nu(Q,t)}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\nu(Q,t)}{\partial t}\,. \tag{17.58}$$

Eine Punkttransformation (17.57) induziert demnach die folgende Transformation der Lagrange-Funktion

$$L'(Q,\dot{Q},t) = L\left(q(Q,t), \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial q(Q,t)}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q(Q,t)}{\partial t}, t\right)\,. \tag{17.59}$$

Die ersten partiellen Ableitungen der transformierten Lagrange-Funktion (17.59) nach den neuen generalisierten Koordinaten

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\left(\sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial Q_\alpha \partial t}\right) \tag{17.60}$$

und nach den neuen generalisierten Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \tag{17.61}$$

führen schließlich auf

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial Q_\alpha} &\overset{(17.59),(17.60)}{=} \sum_{\nu=1}^{f} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\left(\sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial Q_\beta \partial Q_\alpha}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial t \partial Q_\alpha}\right) \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} - \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\left(\sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial Q_\alpha \partial t}\right) \\
&\overset{\text{Schwarz}}{=} \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \\
&\overset{(17.31)}{=} 0\,.
\end{aligned} \tag{17.62}$$

Demnach sind die Lagrange-Gleichungen (17.31) auch unter einer Punkttransformation (17.57) forminvariant.

Wir bemerken, daß sich die generalisierten Kräfte (17.10) unter einer Punkttransformation (17.57) gemäß

$$F'_\alpha \overset{(17.10)}{=} \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial Q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{f}\sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \overset{(17.10)}{=} \sum_{\nu=1}^{f} F_\nu \frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \tag{17.63}$$

transformieren. Ergeben sich die generalisierten Kräfte gemäß (17.29) aus einem generalisierten Potential, so führt dessen Transformation

$$U'(Q,\dot{Q},t) = U\left(q(Q,t), \sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial q(Q,t)}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q(Q,t)}{\partial t}, t\right) \tag{17.64}$$

analog zur Herleitung von (17.62) auf

$$F'_\alpha \overset{(17.29)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial U'}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial U'}{\partial Q_\alpha} \overset{(17.62)}{=} \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial U}{\partial q_\nu}\right)\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \overset{(17.29)}{=} \sum_{\nu=1}^{f} F_\nu \frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha}\,, \tag{17.65}$$

was gerade mit (17.63) übereinstimmt. Aus der Zerlegung (17.34) des generalisierten Potentials ergibt sich, daß sich dessen Bestandteile V und M_μ unter einer Punkttransformation (17.57) wie folgt transformieren:

$$V'(Q,t) = V(q(Q,t),t) + \sum_{\mu=1}^{f} M_\mu(q(Q,t),t)\frac{\partial q_\mu(Q,t)}{\partial t}, \tag{17.66}$$

$$M'_\alpha(Q,t) = \sum_{\mu=1}^{f} M_\mu(q(Q,t),t)\frac{\partial q_\mu(Q,t)}{\partial Q_\alpha}\,. \tag{17.67}$$

Auch die transformierten generalisierten Kräfte (17.63) lassen sich dann gemäß (17.35) zerlegen

$$F'_\alpha = -\frac{\partial V'}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial M'_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{f}\left(\frac{\partial M'_\alpha}{\partial Q_\beta} - \frac{\partial M'_\beta}{\partial Q_\alpha}\right)\dot{Q}_\beta\,, \tag{17.68}$$

wie man mit Hilfe der Kettenregel nachweisen kann:

$$\begin{aligned}
F'_\alpha \overset{(17.66)-(17.68)}{=}\; & -\frac{\partial V}{\partial Q_\alpha} - \sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial M_\mu}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial q_\mu}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{f} M_\mu\frac{\partial^2 q_\mu}{\partial Q_\alpha \partial t} + \sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial M_\mu}{\partial t}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} \\
& + \sum_{\mu=1}^{f}\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial M_\mu}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial t}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\mu=1}^{f} M_\mu\frac{\partial^2 q_\mu}{\partial t\partial Q_\alpha} \\
& + \sum_{\beta=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial M_\mu}{\partial Q_\beta}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + M_\mu\frac{\partial^2 q_\mu}{\partial Q_\beta \partial Q_\alpha} - \frac{\partial M_\mu}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta} - M_\mu\frac{\partial^2 q_\mu}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}\right)\dot{Q}_\beta \\
\overset{\text{Schwarz}}{=}\; & -\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial M_\nu}{\partial t}\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\nu=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial M_\nu}{\partial q_\mu}\left(\sum_{\beta=1}^{f}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t}\right)\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \\
& - \sum_{\nu=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial M_\mu}{\partial q_\nu}\left(\sum_{\beta=1}^{f}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t}\right)\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha} \\
\overset{(17.35),(17.58)}{=}\; & \sum_{\nu=1}^{f} F_\nu\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{17.69}$$

Dies stimmt gerade mit (17.63) überein.

17.6 Geodäte

Für mechanische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen, bei denen die generalisierten Kräfte aus einem generalisierten Potential U berechenbar sind, haben wir eine recht bequeme Methode hergeleitet, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Es ist nicht mehr notwendig, mit vektoriellen Kräften und Beschleunigungen zu arbeiten. Nach der Lagrangschen Methode hat man lediglich zwei skalare Funktionen, nämlich die kinetische Energie T und das generalisierte Potential U, in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten zu ermitteln. Aus deren Differenz bildet man dann die Lagrange-Funktion (17.30), die in (17.31) eingesetzt auf die zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen führt. Die benötigte Transformation von T und U von kartesischen Koordinaten und Geschwindigkeiten auf die entsprechenden generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten erfolgt durch (17.2) und (17.15). Beispielsweise nimmt die kinetische Energie (16.32) in generalisierten Koordinaten die Form

$$T(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f} g_{\lambda\mu}(q,t)\dot{q}_\lambda\dot{q}_\mu + \sum_{\lambda=1}^{f} a_\lambda(q,t)\dot{q}_\lambda + b(q,t) \tag{17.70}$$

an, wobei die Metrik

$$g_{\lambda\mu}(q,t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i(q,t)}{\partial q_\lambda} \frac{\partial x_i(q,t)}{\partial q_\mu} \tag{17.71}$$

offensichtlich symmetrisch ist

$$g_{\mu\lambda}(q,t) = g_{\lambda\mu}(q,t)\,, \tag{17.72}$$

und die Abkürzungen

$$a_\lambda(q,t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i(q,t)}{\partial q_\lambda} \frac{\partial x_i(q,t)}{\partial t}\,, \tag{17.73}$$

$$b(q,t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial x_i(q,t)}{\partial t} \right)^2 \tag{17.74}$$

eingeführt wurden. Für skleronome, holonome Zwangsbedingungen und zeit- sowie geschwindigkeitsunabhängige, konservative generalisierte Kräfte ist die Lagrange-Funktion (17.30) aufgrund von (17.34) und (17.70)–(17.74) gegeben durch

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{f} \sum_{\mu=1}^{f} g_{\lambda\mu}(q) \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu - V(q)\,. \tag{17.75}$$

Deren erste partielle Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten

$$\frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{f} \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q_\nu} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu - \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \tag{17.76}$$

und den generalisierten Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{f} g_{\nu\lambda} \dot{q}_\lambda \tag{17.77}$$

führen auf die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{f} g_{\nu\lambda} \ddot{q}_\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{f} \sum_{\mu=1}^{f} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q_\nu} \right) \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu + \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \overset{(17.31)}{=} 0\,. \tag{17.78}$$

Definiert man zur Metrik $g_{\lambda\mu}$ deren Inverse $g^{-1}_{\lambda\mu}$ gemäß

$$\sum_{\mu=1}^{f} g^{-1}_{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}\,, \tag{17.79}$$

so gehen die Bewegungsgleichungen (17.78) über in

$$\ddot{q}_\chi + \sum_{\lambda=1}^{f} \sum_{\mu=1}^{f} \Gamma_{\lambda\mu\chi} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu = - \sum_{\nu=1}^{f} g^{-1}_{\chi\nu} \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \tag{17.80}$$

mit dem Christoffel-Symbol

$$\Gamma_{\lambda\mu\chi} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{f} g^{-1}_{\chi\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q_\nu} \right)\,. \tag{17.81}$$

Im Falle $V(q) = 0$ bezeichnet man (17.80) als Geodätengleichung.

17.7 Schwerer symmetrischer Kreisel

Als Beispiel betrachten wir nochmals den schweren symmetrischen Kreisel, den wir schon in Abschnitt 15.5 diskutierten. Dessen Bewegung wird mit Hilfe der Euler-Winkel ϑ, φ, ψ als generalisierte Koordinaten beschrieben. Die kinetische Energie des unsymmetrischen Kreisels lautet

$$\begin{aligned} T \quad &\overset{(14.57)}{=} \quad \frac{1}{2}\left(\Theta_1\Omega_1''^2 + \Theta_2\Omega_2''^2 + \Theta_3\Omega_3''^2\right) \\ &\overset{(15.45)-(15.47)}{=} \quad \frac{1}{2}\Big[\Theta_1(\dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\vartheta)^2 + \Theta_2(-\dot\vartheta\sin\psi + \dot\varphi\cos\psi\sin\vartheta]^2 \\ &\qquad +\Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2\Big]\,, \end{aligned} \tag{17.82}$$

so daß man für den symmetrischen Kreisel mit $\Theta_1 = \Theta_2$ erhält

$$T = \frac{1}{2}\Theta_1(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2\,. \tag{17.83}$$

Die potentielle Energie des symmetrischen Kreisels im Schwerefeld der Erde ergibt sich zu (vgl. Skizze im Abschnitt 15.5)

$$V = mgl\cos\vartheta\,. \tag{17.84}$$

Demnach resultiert aus (17.30), (17.83) und (17.84) die Lagrange-Funktion

$$L(\vartheta,\varphi,\psi;\dot\vartheta,\dot\varphi,\dot\psi) = \frac{1}{2}\Theta_1(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}\Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2 - mgl\cos\vartheta\,. \tag{17.85}$$

Die ersten partiellen Ableitungen dieser Lagrange-Funktion nach den generalisierten Geschwindigkeiten lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} &= \Theta_1\dot\vartheta\,, \\ \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= \Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta + \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\cos\vartheta\,, \\ \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} &= \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\,. \end{aligned} \tag{17.86}$$

Entsprechend ergeben sich die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den generalisierten Koordinaten zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\vartheta} &= \Theta_1\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\sin\vartheta + mgl\sin\vartheta\,, \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= 0\,, \\ \frac{\partial L}{\partial\psi} &= 0\,. \end{aligned} \tag{17.87}$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art (17.31) sind dann gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = \Theta_1(\ddot\vartheta - \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta) + \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\sin\vartheta - mgl\sin\vartheta = 0\,, \tag{17.88}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\big(\Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta + \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\cos\vartheta\big) = 0\,, \tag{17.89}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = \frac{d}{dt}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\Theta_3 = 0\,. \tag{17.90}$$

Nach (15.57), (15.61), (15.68) besagen (17.89), (17.90), daß sowohl der Drehimpuls in Richtung der vertikalen $\vec e_3$-Achse

$$L_3 = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \Theta_1\dot\varphi\sin^2\vartheta + \Theta_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\cos\vartheta \tag{17.91}$$

als auch der Drehimpuls in Richtung der Figurenachse $\vec{e}_3'''$

$$L_3''' = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta) \tag{17.92}$$

eine Erhaltungsgröße sind. Dies ist offensichtlich eine unmittelbare Folge davon, daß die Lagrange-Funktion (17.85) nicht explizit von den Euler-Winkeln φ und ψ abhängt. In Verallgemeinerung dessen bezeichnet man eine generalisierte Koordinate q_ν als zyklisch, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit davon abhängt, wenn also gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0\,. \tag{17.93}$$

Aus den Lagrange-Gleichungen zweiter Art (17.31) folgt dann unmittelbar, daß der zu q_ν kanonisch konjugierte generalisierte Impuls

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \tag{17.94}$$

eine Erhaltungsgröße darstellt. Wir können demnach festhalten, daß beim symmetrischen schweren Kreisel die beiden Euler-Winkel φ und ψ zyklisch sind und deshalb deren kanonisch konjugierte Impulse (17.91) und (17.92) Erhaltungsgrößen sind. Wir stellen fest, daß sich dieses Ergebnis im Lagrange-Formalismus sehr viel schneller erzielen läßt als bei der Diskussion der Euler-Gleichungen im Abschnitt 15.5. Andererseits ergibt sich die Erhaltung der Energie (15.81) nicht unmittelbar aus dem Lagrange- sondern erst aus dem später noch zu entwickelnden Hamilton-Formalismus.

Kapitel 18

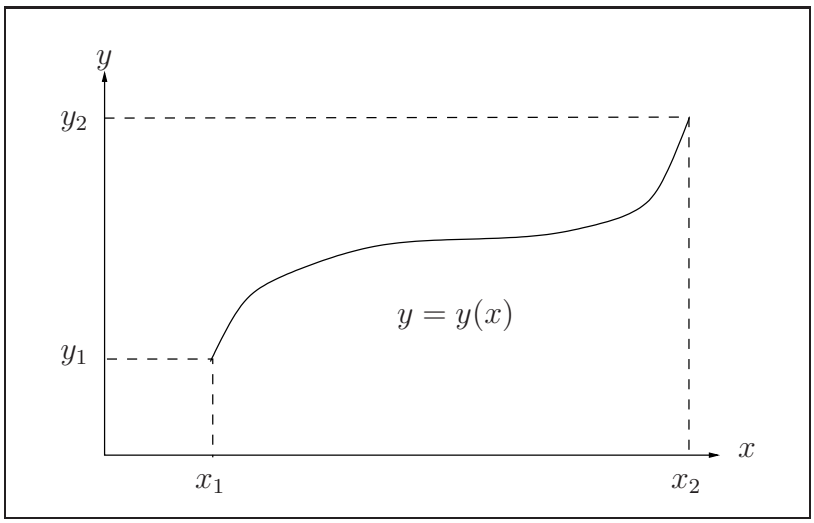
Variationsrechnung

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen der Variationsrechnung dargestellt. Hierbei entwickeln wir analog zur Extremalisierung einer Funktion die Stationaritätsbedingung eines Funktionales. Wir zeigen, daß das Verschwinden der Funktionalableitung auf die Euler-Gleichung der Variationsrechnung führt. Als Anwendung berechnen wir die Brachistochrone, d.h. diejenige Kurve, die ein Massenpunkt unter dem Einfluß des Schwerefeldes am schnellsten hinuntergleiten kann. Außerdem diskutieren wir das Hamiltonsche Prinzip, nach dem die Extremalisierung der Wirkung, d.h. des Zeitintegrals der Lagrange-Funktion, auf die Lagrange-Gleichung zweiter Art führt.

18.1 Problemstellung

Eine Funktion $y = y(x)$ stellt eine Vorschrift dar, die jedem x-Wert eine Zahl zuordnet, die man als y-Wert bezeichnet. In der Variationsrechnung betrachtet man dagegen ein Funktional $F[y(\cdot)]$, das einer Funktion $y = y(x)$ eine Zahl zuordnet. Um Funktionale von Funktionen zu unterscheiden, schließen wir deren Argumente mit eckigen und nicht mit runden Klammern ein. Beispielsweise stellt

$$F[y(\cdot)] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \tag{18.1}$$



das Funktional dar, das die Wegstrecke entlang der Kurve $y = y(x)$ zwischen den beiden Punkten

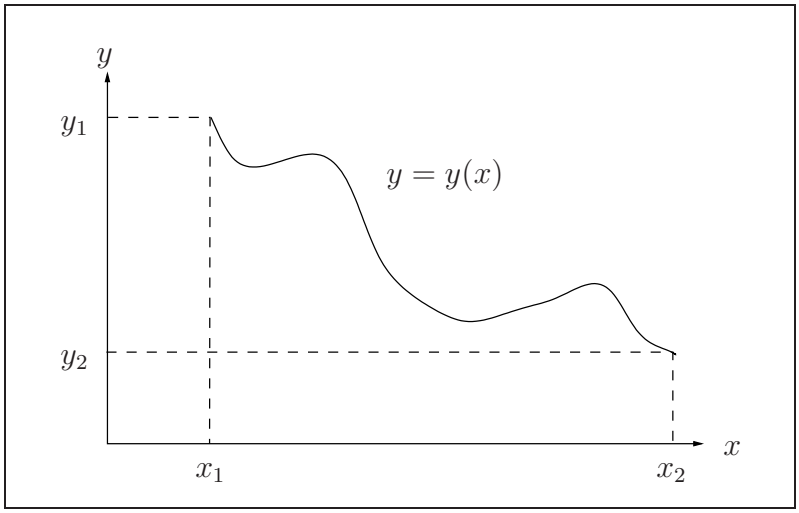
$(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ angibt. Dieses Funktional ordnet jeder Funktion $y = y(x)$, die diese beiden Punkte miteinander verbindet, die Weglänge der entsprechenden Kurve als Zahl zu.

Bei der Diskussion einer Funktion $y = y(x)$ wird untersucht, für welche Argumente x ein Maximum oder ein Minimum auftritt. Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion $y = y(x)$ lautet

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = 0\,. \tag{18.2}$$

Analog hierzu kann man nun die Frage stellen, für welche Funktion $y = y(x)$ ein Funktional $F[y(\cdot)]$ extremal wird. Im folgenden wollen wir die zu (18.2) analoge Bedingung für die Stationarität eines Funktionales aufstellen.

Ausgangspunkt für die Entwicklung der Variationsrechnung war das Brachistochronen-Problem, das von den Brüdern Bernouli 1697 unabhängig voneinander gelöst wurde. Ein Massenpunkt m gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft entlang einer Kurve $y = y(x)$ reibungsfrei von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2):



Seine Anfangsgeschwindigkeit sei null. Nun soll die Kurve $y = y(x)$ so bestimmt werden, daß die Zeit T minimal wird, die das Teilchen für den Weg von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) braucht. Aus der Energieerhaltung folgt

$$\frac{m}{2}v^2 = mg[y_1 - y(x)]\,, \tag{18.3}$$

so daß sich die zu minimierende Zeit T als das folgende Funktional der Kurve $y = y(x)$ ergibt:

$$T[y(\cdot)] = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g[y_1 - y(x)]}}\,dx\,. \tag{18.4}$$

Die Lösung des Brachistrochronen-Problems ist beispielsweise für die Konstruktion einer Notrutsche relevant, über die Passagiere im Notfall das Flugzeug verlassen müssen.

18.2 Euler-Gleichung

In Verallgemeinerung des Brachistochronen-Problems betrachtet wir das Funktional

$$F[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx \tag{18.5}$$

mit den vorgegebenen Randwerten

$$y(x_1) = y_1\,, \qquad\qquad y(x_2) = y_2 \tag{18.6}$$

und bestimmen diejenige Kurve $y = y(x)$, für die das Funktional extremal wird. Wir betrachten nun eine beliebige infinitesimale Abweichung

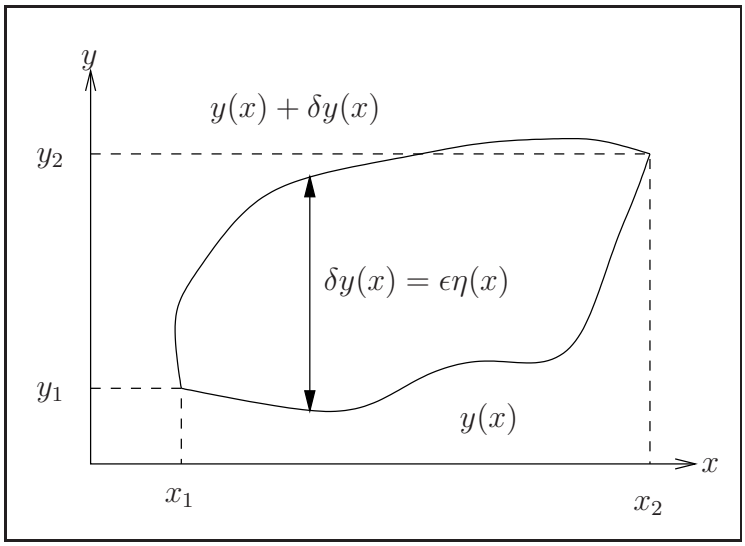
$$\delta y(x) = \epsilon\eta(x) \tag{18.7}$$

von dieser extremalen Kurve $y = y(x)$, wobei ϵ infinitesimal klein ist. Hierbei ist zu beachten, daß die beliebige Funktion $\eta(x)$ die Randwerte

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{18.8}$$

besitzt, da auch $y(x) + \delta y(x)$ dieselben Randwerte wie (18.6) besitzen soll:

$$y(x_1) + \delta y(x_1) = y_1\,, \qquad\qquad y(x_2) + \delta y(x_2) = y_2\,. \tag{18.9}$$



Das Funktional $F[y(\cdot) + \delta y(\cdot)]$ wird damit zu einer Funktion von ϵ, die wir mit

$$F(\epsilon) = F[y(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] \tag{18.10}$$

bezeichnen. Für die gesuchte Funktion $y = y(x)$ muß dann $F(\epsilon)$ an der Stelle $\epsilon = 0$ extremal sein. Es muß deshalb

$$\left.\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \tag{18.11}$$

für beliebiges $\eta(x)$ mit den Randwerten (18.8) erfüllt sein. Zur Auswertung von (18.11) berechnen wir (18.10) mit Hilfe von (18.5) bis zur ersten Ordnung in ϵ:

$$\begin{aligned} F(\epsilon) &\overset{(18.5),(18.10)}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x), x)dx \\ &\overset{\text{Taylor}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ f(y(x), y'(x), x) + \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y(x)}\epsilon\eta(x) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)}\epsilon\eta'(x) \right\} + \dots\,. \end{aligned} \tag{18.12}$$

Einsetzen von (18.12) in (18.11) führt demnach auf die Bedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y(x)} \eta(x) + \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)} \eta'(x) \right\} = 0 \,. \tag{18.13}$$

Führt man eine partielle Integration im zweiten Term durch, so entfällt der entstehende Oberflächenterm wegen der Randbedingung (18.8):

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)} \right\} \eta(x) + \underbrace{\left[\frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{\stackrel{(18.8)}{=} 0} = 0 \,. \tag{18.14}$$

Da die Funktion $\eta(x)$ beliebig ist, muß der Klammerausdruck im Integranden gleich null sein. Wäre der Ausdruck an irgendeiner Stelle positiv oder negativ und damit von null verschieden, so wäre er dies wegen der Stetigkeit auch in einer gewissen Umgebung. Dann würde eine Funktion $\eta(x)$, die in dieser Umgebung positiv und sonst gleich null ist, zu einem Integralwert ungleich null führen. Da dies im Widerspruch zu (18.14) steht, gilt demnach die Euler-Gleichung der Variationsrechnung:

$$\frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)} = 0 \,. \tag{18.15}$$

Es handelt sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion $y = y(x)$, die unter Berücksichtigung der Randbedingungen (18.6) zu lösen ist. Eine solche Funktion $y = y(x)$ stellt ein Extremum des Funktionales (18.5) dar.

18.3 Funktionalableitung

Wir betrachten zunächst eine Funktion F endlich vieler Variablen $y_1, \ldots, y_N$

$$F = F\left(y_1, \ldots, y_N\right) \,. \tag{18.16}$$

Die partielle Ableitung von F nach der Variablen y_i

$$\frac{\partial F\left(y_1, \ldots, y_N\right)}{\partial y_i} \tag{18.17}$$

gibt dann die Änderung dieser Funktion an, wenn nur die Variable y_i verändert wird und die anderen Variablen $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_N$ konstant gehalten werden. Die Gesamtänderung der Funktion

$$\delta F(y_1, \ldots, y_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F\left(y_1, \ldots, y_N\right)}{\partial y_i} \delta y_i \tag{18.18}$$

setzt sich dann additiv aus allen Veränderungen der Funktion zusammen, wenn eine Variable verändert wird und alle anderen Variablen konstant gehalten werden. Wir verallgemeinern nun alle Begriffe von endlich vielen auf ein Kontinuum an Variablen. Dazu betrachten wir ein beliebiges Funktional $F[y(\cdot)]$. Die Funktionalableitung

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} \tag{18.19}$$

soll dann angeben, wie sich der Wert des Funktionales verändert, wenn man die Funktion $y = y(x)$ nur am Orte x variiert. Damit ist die Funktionalableitung (18.19) eine gewöhnliche, von der Variablen x abhängige Funktion. Die Gesamtänderung des Funktionales

$$\delta F[y(\cdot)] = \int dx \frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} \delta y(x) \tag{18.20}$$

setzt sich dann additiv aus allen lokalen Änderungen zusammen, die bei der Variation der Funktion $y = y(x)$ an allen Orten x entstehen. Wie die partielle Ableitung läßt sich auch die Funktionalableitung als Grenzfall eines Differenzenquotienten darstellen. Dazu betrachten wir eine Störung der Funktion $y = y(x)$ am Ort x_0 mit der Stärke ϵ

$$\delta y(x) = \epsilon\delta(x - x_0) \tag{18.21}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} F[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x_0)] - F[y(\cdot)] &= \delta F[y(\cdot)] \\ &\overset{(18.20)}{=} \int dx \frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} \epsilon\delta(x - x_0) \\ &= \epsilon \frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x_0)} \,. \end{aligned} \tag{18.22}$$

Im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ folgt dann

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)] - F[y(\cdot)]}{\epsilon} \,. \tag{18.23}$$

Aus dieser Definition der Funktionalableitung als Grenzfall eines Differenzenquotienten lassen sich einige nützliche Rechenregeln ableiten:

1. Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y(x)} \{F[y(\cdot)]G[y(\cdot)]\} &\overset{(18.23)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)]G[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)] - F[y(\cdot)]G[y(\cdot)]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \frac{F[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)] - F[y(\cdot)]}{\epsilon} \, G[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)] \right. \\ &\quad \left. + F[y(\cdot)] \frac{G[y(\cdot) + \epsilon\delta(\cdot - x)] - G[y(\cdot)]}{\epsilon} \right\} \\ &\overset{(18.23)}{=} \frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} G[y(\cdot)] + F[y(\cdot)] \frac{\delta G[y(\cdot)]}{\delta y(x)} \,. \end{aligned} \tag{18.24}$$

2. Triviales Funktional

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y(x_0)} y(x) &\overset{(18.23)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y(x) + \epsilon\delta(x - x_0) - y(x)}{\epsilon} \\ &= \delta(x - x_0) \,. \end{aligned} \tag{18.25}$$

3. Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y(x_0)} f(y(x)) &\overset{(18.23)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(y(x) + \epsilon\delta(x - x_0)) - f(y(x))}{\epsilon} \\ &\overset{\text{Taylor}}{=} \frac{\delta f(y(x))}{\delta y(x)} \delta(x - x_0) \\ &\overset{(18.25)}{=} \frac{\delta f(y(x))}{\delta y(x)} \frac{\delta y(x)}{\delta y(x_0)} \,. \end{aligned} \tag{18.26}$$

In Verallgemeinerung von (18.2) besagt die Bedingung für die Stationarität eines Funktionales $F[y(\cdot)]$, daß dessen Funktionalableitung verschwindet:

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} = 0 \,. \tag{18.27}$$

Wir berechnen nun die Funktionalableitung des Funktionales (18.5):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} &\overset{(18.5)}{=} \frac{\delta}{\delta y(x)} \int_{x_1}^{x_2} f(y(x_0), y'(x_0), x_0) dx_0 \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\delta y(x)} dx_0 \\
&\overset{(18.26)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y(x_0)} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} \right. \qquad (18.28) \\
&\qquad \left. + \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y'(x_0)} \frac{\delta y'(x_0)}{\delta y(x)} \right\} dx_0 \,. \qquad (18.29)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Vertauschbarkeit von gewöhnlicher Ableitung und Funktionalableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\delta y'(x_0)}{\delta y(x)} &= \frac{\delta}{\delta y(x)} \frac{dy(x_0)}{dx_0} \\
&= \frac{\delta}{\delta y(x)} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{y(x_0 + \epsilon) - y(x_0)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{\delta y(x_0 + \epsilon)}{\delta y(x)} - \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} \right\} \\
&= \frac{d}{dx_0} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} \qquad (18.30)
\end{aligned}$$

geht (18.29) über in

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y(x_0)} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} + \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y'(x_0)} \frac{d}{dx_0} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} \right\} dx_0 \,. \qquad (18.31)$$

Eine partielle Integration im zweiten Term führt auf

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y(x_0)} - \frac{d}{dx_0} \frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y'(x_0)} \right\} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} dx_0 \\
&\quad + \left[\frac{\partial f(y(x_0), y'(x_0), x_0)}{\partial y'(x_0)} \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} \right]_{x_1}^{x_2} \,. \qquad (18.32)
\end{aligned}$$

Aufgrund von (18.25) wird beim Randterm die Funktion $\delta(x_0 - x)$ für $x_0 = x_{1,2}$ ausgewertet. Da aber x im Innern des Intervalles liegt, d.h. $x_1 < x < x_2$, folgt aus (18.32)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} &= \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'(x)} \\
&\overset{(18.27)}{=} 0 \,. \qquad (18.33)
\end{aligned}$$

Die Bedingung (18.27) für die Stationarität des Funktionales $F[y(\cdot)]$ führt demnach ebenfalls auf die Euler-Gleichung (18.15) der Variationsrechnung.

18.4 Brachistochronen-Problem

Für das Brachistochronen-Problem lautet der Integrand des Funktionales (18.4)

$$f(y(x), y'(x), x) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g[y_1 - y(x)]}}, \qquad (18.34)$$

so daß dieser nicht explizit abhängig von x ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \,. \qquad (18.35)$$

In einem solchen Falle läßt sich die Euler-Gleichung (18.15) direkt integrieren. Wir erhalten nämlich

$$\frac{d}{dx}\left\{y'(x)\frac{\partial f}{\partial y'(x)} - f\right\} = y''(x)\frac{\partial f}{\partial y'(x)} + y'(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'(x)} - \frac{\partial f}{\partial x} - y'(x)\frac{\partial f}{\partial y(x)} - y''(x)\frac{\partial f}{\partial y'(x)}$$
$$\overset{(18.15),(18.35)}{=} 0\,, \tag{18.36}$$

so daß eine Integration auf

$$y'(x)\frac{\partial f}{\partial y'(x)} - f = c \tag{18.37}$$

mit einer Integrationskonstanten c führt. Einsetzen von (18.34) in (18.37) ergibt dann

$$y'(x)\frac{1}{\sqrt{2g[y_1 - y(x)]}}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} - \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g(y_1-y(x))}} = c\,, \tag{18.38}$$

so daß wir nach kurzer Umformung

$$\frac{1}{2g[y_1 - y(x)][1+y'(x)^2]} = c^2 \tag{18.39}$$

erhalten. Wir bestimmen nun die Parameterdarstellung $x = x(s), y = y(s)$ der Brachistochrone. Hierzu machen wir den Ansatz

$$y'(x) = -\cot\frac{s}{2} \tag{18.40}$$

und erhalten aus (18.39)

$$\frac{1}{2gc^2[y_1 - y(x)]} = 1 + y'(x)^2 = 1 + \cot^2\frac{s}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{s}{2}}\,. \tag{18.41}$$

Mit der trigonometrischen Formel

$$\sin^2\frac{s}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos s) \tag{18.42}$$

folgt dann aus (18.41)

$$y(s) = y_1 - \frac{1}{4gc^2}(1-\cos s)\,. \tag{18.43}$$

Einsetzen von (18.43) in (18.40) ergibt dann

$$-\cot\frac{s}{2} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{2gc^2}\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\frac{ds}{dx}\,, \tag{18.44}$$

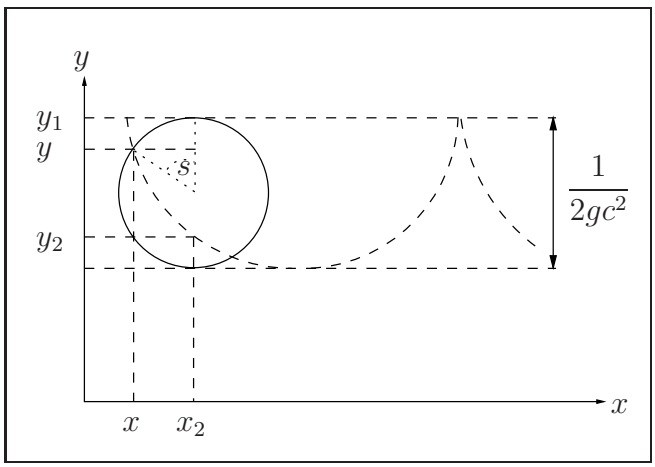
so daß wir mit Hilfe von (18.42) eine Differentialgleichung für $x(s)$ erhalten

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{4gc^2}(1-\cos s)\,. \tag{18.45}$$

Die Integration von (18.45) liefert

$$x(s) = x_1 + \frac{1}{4gc^2}(s - \sin s)\,, \tag{18.46}$$

so daß die durch (18.43) und (18.46) definierte Brachistochrone eine Zykloide darstellt:



In der 22. Übungsaufgabe wird als weiteres Beispiel zur Variationsrechnung untersucht, welche Seifenfläche sich zwischen zwei parallelen konzentrischen Drahtringen ausbildet.

18.5 Verallgemeinerungen der Variationsrechnung

Wir haben die Euler-Gleichung (18.15) der Variationsrechnung für eine Funktion $y = y(x)$ abgeleitet, die von einer Variablen x abhängt. Die Form des Funktionales war durch (18.5) eingeschränkt. Im folgenden stellen wir kurz einige Verallgemeinerungen der Variationsrechnung vor.

18.5.1 Mehrere Funktionen

Wir betrachten ein Funktional

$$F[y_1(\cdot), \ldots, y_N(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), \ldots, y_N(x), y_1'(x), \ldots, y_N'(x), x) dx \tag{18.47}$$

von N Funktionen $y_1 = y_1(x), \ldots, y_N = y_N(x)$ mit festen Randwerten

$$y_i(x_1) = y_{i1}\,, \qquad y_i(x_2) = y_{i2}\,; \qquad i = 1, \ldots, N\,. \tag{18.48}$$

Wir suchen diejenigen Funktionen $y_1 = y_1(x), \ldots, y_N = y_N(x)$, für die das Funktional (18.47) stationär wird. Die Stationaritätsbedingungen

$$\frac{\delta F[y_1(\cdot), \ldots, y_N(\cdot)]}{\delta y_i(x)} = 0\,; \qquad i = 1, \ldots, N \tag{18.49}$$

liefern analog zu Abschnitt 18.3 die N Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_i(x)} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'(x)} = 0\,; \qquad i = 1, \ldots, N\,. \tag{18.50}$$

Es handelt sich um N gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die N gesuchten Funktionen $y_1 = y_1(x), \ldots, y_N = y_N(x)$, die unter Berücksichtigung der Randbedingungen (18.48) zu lösen sind. Diese Verallgemeinerung der Variationsrechnung ist für die Mechanik mehrerer Massenpunkte notwendig (vgl. Abschnitt 18.6).

18.5.2 Mehrere Argumente

Wir betrachten nun den Fall, daß mehrere Argumente $x_1, \ldots, x_N$ anstelle von x vorliegen. Gesucht ist demnach eine Funktion $y = y(x_1, \ldots, x_N)$, die das Funktional

$$F[y(\cdot, \ldots, \cdot)] = \int\limits_B d^N x f\left(y(x_1, \ldots, x_N), \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_N}, x_1, \ldots, x_N\right) \tag{18.51}$$

extremal macht. Hierbei sei die Funktion $y = y(x_1, \ldots, x_N)$ auf dem Rand des Integrationsbereiches B fest vorgegeben. Aus der Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta F[y(\cdot, \ldots, \cdot)]}{\delta y(x_1, \ldots, x_N)} = 0 \tag{18.52}$$

folgt dann die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y(x_1, \ldots, x_N)} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \left(\dfrac{\partial y(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_i} \right)} = 0 \,. \tag{18.53}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $y = y(x_1, \ldots, x_N)$. Eine mögliche Anwendung für diese Verallgemeinerung der Variationsrechnung wäre etwa die Ausdehnung einer dehnbaren Membran bzw. einer Seifenhaut im Schwerefeld der Erde, die längs einer Kurve in der x_1-x_2-Ebene eingespannt ist. Hierfür konkurrieren Schwerkraft und Oberflächenspannung miteinander und die Gleichgewichtskonfiguration wird durch das Minimun der Summe der beiden potentiellen Energien bestimmt.

Die beiden Verallgemeinerungen (18.47) und (18.51) der Variationsrechnung können auch miteinander kombiniert werden. Dann enthält das Funktional mehrere Funktionen, die jeweils von mehreren Variablen abhängen.

18.5.3 Höhere Ableitungen

Falls das Funktional höhere Ableitungen der Funktion $y = y(x)$ enthält, wie z.B.

$$F[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), y''(x), x) dx \,, \tag{18.54}$$

treten auch höhere Ableitungen in der Euler-Gleichung auf. Die Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} = 0 \tag{18.55}$$

führt beispielsweise im Falle des Funktionales (18.54) auf die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''(x)} = 0 \,. \tag{18.56}$$

Es handelt sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung für die Funktion $y = y(x)$. Die üblichen Randbedingungen (18.6) reichen nicht aus, die Funktion $y = y(x)$ eindeutig festzulegen. Eine genaue Analyse der Stationaritätsbedingung (18.55) im Falle des Funktionales (18.54) zeigt, daß durch partielle Integrationen noch zusätzliche Randterme entstehen, deren Verschwinden auf die zusätzlichen Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y''(x)} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{\partial f}{\partial y''(x)} \right|_{x=x_2} = 0 \tag{18.57}$$

führt. Beispielsweise wird das Durchbiegen eines Balkens im Rahmen der Kontinuumsmechanik durch ein Energiefunktional der Form (18.54) beschrieben (vgl. 24. Übungsaufgabe).

18.6 Hamilton-Prinzip

Wir stellen ein Variationsproblem auf, dessen Euler-Gleichungen die Langrange-Gleichungen zweiter Art sind. Hierzu betrachten wir das Zeitintegral der Lagrange-Funktion als Funktional der Bahnkurve

$$\mathcal{A}[q_1(\cdot),\ldots,q_f(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t),\ldots,q_f(t),\dot{q}_1(t),\ldots,\dot{q}_f(t),t)dt\,. \tag{18.58}$$

Diese Größe wird als Wirkung (= action) oder Wirkungsfunktional bezeichnet. Wir untersuchen nun das Hamiltonsche Prinzip, nach dem das Wirkungsfunktional (18.58) stationär sein soll

$$\frac{\delta\mathcal{A}[q_1(\cdot),\ldots,q_f(\cdot)]}{\delta q_\nu(t)} = 0\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{18.59}$$

Hierbei sind die Variationen dadurch eingeschränkt, daß Anfangs- und Endpunkte festgehalten werden:

$$q_\nu(t_1) = q_{\nu_1}\,, \qquad q_\nu(t_2) = q_{\nu_2}\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{18.60}$$

Nach Abschnitt 18.5.1 führt das Hamiltonsche Prinzip (18.59) auf die Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_\nu(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu(t)} = 0\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{18.61}$$

die offensichtlich äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen zweiter Art (17.31) sind. Deshalb bezeichnet man (17.31) bzw. (18.61) auch als Euler-Langrange-Gleichungen. In der 23. Übungsaufgabe werden die Euler-Lagrange-Gleichungen zweier schwingender Massenpunkte untersucht.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt demnach, daß aus der Menge aller möglichen Bahnkurven diejenige physikalisch realisiert ist, die die Wirkung (18.58) stationär macht. Es ist dabei nicht wichtig, ob es sich bei diesem Extremum um ein Maximum oder um ein Minimum handelt. In konkreten Anwendungen führt die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen (18.61) in der Regel auf ein Minimum der Wirkung (18.58). Deshalb wird das Hamiltonsche Prinzip auch häufig als das Prinzip der kleinsten Wirkung bezeichnet.

Bei den Euler-Lagrange-Gleichungen (18.61) handelt es sich um f gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integration insgesamt $2f$ Integrationskonstanten erfordert. Man kann diese Integrationskonstanten entweder durch die Randbedingungen (18.60) oder durch die Anfangsbedingungen des physikalischen Problems

$$q_\nu(t_1) = q_{\nu_1}\,, \qquad \dot{q}_\nu(t_1) = \dot{q}_{\nu_1}\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f \tag{18.62}$$

festlegen. Die Angaben (18.60) bzw. (18.62) sind dabei vollkommen gleichwertig. In der 25. Übungsaufgabe lösen wir für den harmonischen Oszillator die Euler-Lagrange-Gleichung (18.61) mit den Randbedingungen (18.60) und berechnen die extremale Wirkung (18.58).

18.7 Anmerkungen zum Hamilton-Prinzip

Für die praktische Lösung von Problemen bringt das Hamiltonsche Prinzip (18.59) keine Vorteile, da dessen konkrete Anwendung wieder zu den Euler-Lagrange-Gleichungen (18.61) führt. Den Vorteil des Hamiltonschen Prinzips kann man darin sehen, daß es die Mechanik holonomer Zwangsbedingungen in der knappen und prägnanten Form (18.59) zusammenfaßt. Dies ist nur eine Gleichung im Gegensatz zu den f Euler-Lagrange-Gleichungen (18.61). Außerdem setzt die Form des Hamiltonschen Prinzips (18.59) noch keine bestimmten generalisierten Koordinaten voraus. Von den zu wählenden generalisierten Koordinaten wird lediglich verlangt, daß sie mit allen

Zwangsbedingungen verträglich sind.

In der nichtrelativistischen Mechanik ist die Lagrange-Funktion gemäß (17.30) die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, wobei sie als Funktion geeigneter generalisierter Koordinaten zu schreiben ist. Im Unterschied zur kinetischen oder potentiellen Energie ist die Lagrange-Funktion aber keine physikalische Meßgröße. Sie ist vielmehr eine mathematische Hilfsgröße, die so definiert ist, daß aus ihr die Bewegungsgleichungen folgen. Umgekehrt legen die Bewegungsgleichungen die Lagrange-Funktion nicht eindeutig fest, da man zu einer Lagrange-Funktion immer das totale Differential einer von den generalisierten Koordinaten abhängigen Funktion hinzuaddieren kann (vgl. Abschnitt 17.4). Eine solche Eichtransformation (17.48) führt bei der Wirkung (18.58) zu einem zusätzlichen Term, der von den Randpunkten t_1, t_2 abhängt:

$$\mathcal{A}'[q(\cdot)] = \mathcal{A}[q(\cdot)] + F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1)\,. \tag{18.63}$$

Für die Funktionalableitung bedeutet dies

$$\frac{\delta \mathcal{A}'[q(\cdot)]}{\delta q_\nu(t)} = \frac{\delta \mathcal{A}[q(\cdot)]}{\delta q_\nu(t)} + \frac{\partial F}{\partial q_\nu(t_2)}\delta(t_2 - t) - \frac{\partial F}{\partial q_\nu(t_1)}\delta(t - t_1)\,; \qquad \nu = 1, \ldots, f\,, \tag{18.64}$$

wobei die Deltafunktionen im Falle von $t_1 < t < t_2$ verschwinden und so das Hamiltonsche Prinzip invariant ist:

$$\frac{\delta \mathcal{A}'[q(\cdot)]}{\delta q_\nu(t)} = \frac{\delta \mathcal{A}[q(\cdot)]}{\delta q_\nu(t)}\,; \qquad \nu = 1, \ldots, f\,. \tag{18.65}$$

Im allgemeinen ist die Lagrange-Funktion eine besonders einfache Funktion der in Frage kommenden generalisierten Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten. Oft ist sie auch die einfachste mit den Symmetrien des Systems verträgliche Funktion. Bei der Entwicklung neuer physikalischer Theorien geht man deshalb bevorzugt von einem Ansatz für die Lagrange-Funktion aus.

Kapitel 19

Noether-Theorem

In diesem Kapitel gehen wir vom Hamiltonschen Prinzip aus und untersuchen den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen in vollster Allgemeinheit. Wir werden zeigen, daß jede einparametrige Schar von Transformationen der generalisierten Koordinaten und der Zeit, unter denen das Hamiltonsche Prinzip invariant ist, zu einer Erhaltungsgröße führt. Dieser Zusammenhang wurde von der Mathematikerin Emmy Noether zu Beginn des 20. Jahrhunderts abgeleitet und trägt daher ihren Namen.

19.1 Einparametrige Schar von Transformationen

Wir betrachten nun Transformationen der generalisierten Koordinaten und der Zeit, die von einem kontinuierlichen Parameter ε abhängen:

$$q'_\nu = q'_\nu(q_1, \ldots, q_f; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t, \epsilon)\,, \tag{19.1}$$

$$t' = t'(q_1, \ldots, q_f; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t, \epsilon)\,. \tag{19.2}$$

Entwickelt man (19.1) und (19.2) in eine Taylor-Reihe bezüglich des Scharparameters ε, so soll der Parameterwert $\varepsilon = 0$ der identischen Transformation entsprechen, während der erste Term in ε eine infinitesimale Transformation darstellt:

$$q'_\nu = q_\nu + \varepsilon \frac{\partial q'_\nu}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \ldots, \tag{19.3}$$

$$t' = t + \varepsilon \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \ldots\,. \tag{19.4}$$

Für die Herleitung des Noether-Theorems wird es ausreichen, diese infinitesimale Transformation zu betrachten.

19.2 Invarianzbedingung

Wir vergleichen nun die Wirkung der Bahn $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_f(t))$ mit Randwerten t_1 und t_2

$$\mathcal{A}[q(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) dt \tag{19.5}$$

mit der Wirkung der tranformierten Bahn $q'(t') = (q'_1(t'), \ldots, q'_f(t'))$ und den entsprechend transformierten Randwerten t'_1, t'_2

$$\mathcal{A}[q'(\cdot')] = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) dt'\,. \tag{19.6}$$

Die Transformation (19.1), (19.2) stellt eine Symmetrietransformation dar, wenn sie die Bewegungsgleichungen und damit das Hamiltonsche Prinzip nicht ändert. Dies ist auf jeden Fall gegeben, wenn beide Wirkungen übereinstimmen:

$$\mathcal{A}[q'(\cdot')] = \mathcal{A}[q(\cdot)]\,. \tag{19.7}$$

Aus (19.5)–(19.7) folgt damit

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right)\frac{dt'}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right)dt\,. \tag{19.8}$$

Entwickelt man die linke Seite für eine infinitesimale Transformation in eine Taylor-Reihe in ε, so lautet die Invarianzbedingung

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right)\frac{dt'}{dt}\right]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0\,. \tag{19.9}$$

19.3 Erhaltungsgröße

Bis zur ersten Ordnung in ε folgt aus (19.4)

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon\frac{d}{dt}\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots \tag{19.10}$$

und damit für die transformierten generalisierten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
\frac{dq'_\nu}{dt'} &= \frac{dq'_\nu}{dt}\frac{dt}{dt'} \\
&\overset{(19.3),(19.10)}{=} \left(\frac{dq_\nu}{dt} + \varepsilon\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots\right)\left(1 - \varepsilon\frac{d}{dt}\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots\right) \\
&= \frac{dq_\nu}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} - \frac{dq_\nu}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \dots\,.
\end{aligned} \tag{19.11}$$

Setzt man (19.3), (19.4), (19.10) und (19.11) in die Invarianzbedingung (19.9) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[L\left(q + \varepsilon\frac{\partial q'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots, \frac{dq}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} - \frac{dq}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \dots, t + \varepsilon\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots\right)\right. \\
&\left.\cdot\left(1 + \varepsilon\,\frac{d}{dt}\frac{dt'}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \dots\right)\right]\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_\nu}\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} - \dot q_\nu\,\frac{d}{dt}\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\,\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + L\frac{d}{dt}\,\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{19.12}$$

Für die Bahnkurve $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$ gelten einerseits die Euler-Lagrange-Gleichungen (18.61), andererseits folgt aus der Kettenregel analog zu (18.36)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(L - \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\dot q_\nu\right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\nu}\dot q_\nu + \frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\ddot q_\nu\right) + \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{f}\left(\dot q_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu} + \ddot q_\nu\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\right) \overset{(18.61)}{=} \frac{\partial L}{\partial t}\,.
\end{aligned} \tag{19.13}$$

Mit Hilfe von (18.61) und (19.13) geht die Invarianzbedingung (19.12) über in

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\right)\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right]\\
&+\left(L-\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\dot{q}_\nu\right)\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\dot{q}_\nu\right)\left.\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0\\
&\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+\left(L-\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\dot{q}_\nu\right)\left.\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right]=0\,. \qquad (19.14)
\end{aligned}$$

Hieraus lesen wir das Noether-Theorem ab. Ist die Wirkung invariant unter der einparametrigen Schar von Transformationen (19.1), (19.2), so folgt daraus die Erhaltungsgröße

$$\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+\left(L-\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\dot{q}_\nu\right)\left.\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\text{konstant}\,. \qquad (19.15)$$

Es handelt sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Bahnkurve, die ein erstes Integral der Euler-Lagrange-Gleichungen (19.12) darstellt. Wir zeigen nun, daß die bekannten Erhaltungssätze vom Impuls und der Energie Spezialfälle des Noether-Theorems sind.

19.4 Impulserhaltung

Liegt eine zyklische Koordinate q_{ν_0} vor (vgl. Abschnitt 17.7), so hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von ihr ab:

$$L=L(q_1,\ldots,q_{\nu_0-1},q_{\nu_0+1},\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)\,. \qquad (19.16)$$

Wir betrachten daher die Transformation

$$\begin{aligned}
q'_\nu &= q_\nu+\varepsilon\,\delta_{\nu\nu_0}\,, &(19.17)\\
t' &= t\,, &(19.18)
\end{aligned}$$

die die Wirkung invariant läßt. Es gilt dann

$$\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\delta_{\nu\nu_0},\qquad\left.\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0\,, \qquad (19.19)$$

so daß sich die Erhaltungsgröße (19.15) auf den zur generalisierten Koordinate q_{ν_0} kanonisch konjugierten Impuls reduziert:

$$p_{\nu_0}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\nu_0}}=\text{konstant}\,. \qquad (19.20)$$

19.5 Energieerhaltung

Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab

$$L=L(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f)\,, \qquad (19.21)$$

so läßt die Transformation

$$\begin{aligned}
q'_\nu &= q_\nu, &(19.22)\\
t' &= t+\varepsilon &(19.23)
\end{aligned}$$

die Wirkung invariant. Es gilt dann

$$\left.\frac{\partial q'_\nu}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1\,, \tag{19.24}$$

so daß die Erhaltungsgröße (19.15) lautet

$$\sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\dot{q}_\nu - L = \text{konstant}\,. \tag{19.25}$$

Für die Standard-Wirkung (17.75) handelt es sich bei der Erhaltungsgröße (19.25) gerade um die Energie des Systems:

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f} g_{\lambda\mu}(q)\,\dot{q}_\lambda\dot{q}_\mu + V(q) = \text{konstant}\,. \tag{19.26}$$

Kapitel 20

Hamiltonsche Mechanik

In der Lagrangeschen Mechanik werden die f generalisierten Koordinaten als unabhängige Variablen angesehen und deren Bewegungsgleichungen, die Lagrange-Gleichungen, stellen f gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Wir gehen nun zur Hamiltonschen Mechanik über, bei der sowohl die f generalisierten Koordinaten q_ν als auch die f dazu kanonisch konjugierten generalisierten Impulse p_ν aus (17.94) als unabhängige Variablen angesehen werden. Hierzu ersetzt man die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ im Rahmen einer Legendre-Transformation durch die generalisierten Impulse p_ν, so daß die Lagrange- in die Hamilton-Funktion übergeht. Die dazugehörigen Bewegungsgleichungen, die Hamilton-Gleichungen, stellen $2f$ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Für die praktische Lösung mechanischer Probleme bietet der Hamilton-Formalismus im allgemeinen keine Vorteile gegenüber dem Lagrange-Formalismus. Die Hamiltonsche Mechanik ist aber von besonderem theoretischen Interesse, da sie der Ausgangspunkt für den Übergang zur Quantenmechanik darstellt und auch eine wichtige Grundlage für die statistische Mechanik darstellt.

20.1 Legendre-Transformation

Eine Funktion $f = f(x)$ ordnet jedem x-Wert den Funktionswert $f(x)$ zu und besitzt das totale Differential

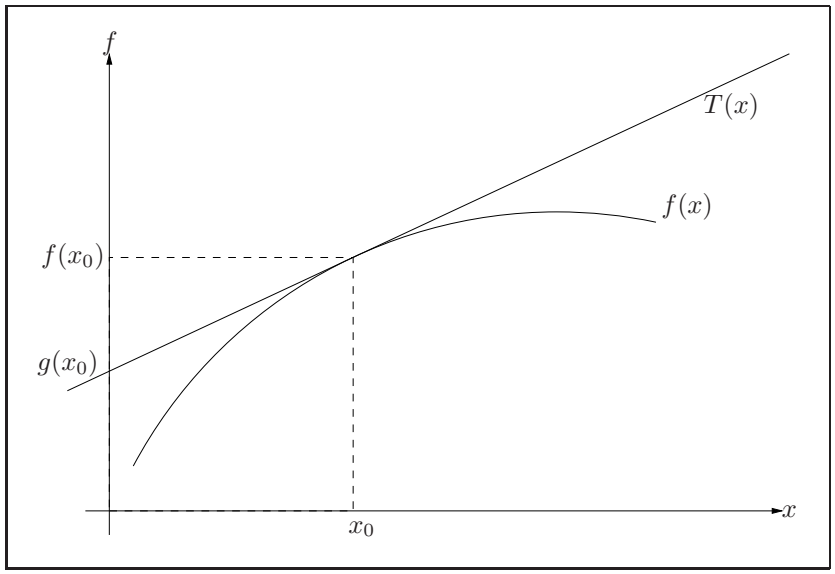
$$df = f'(x)dx\,. \tag{20.1}$$

Die Funktion

$$p = f'(x) \tag{20.2}$$

gibt dagegen zu jedem x-Wert die Steigung der Kurve $f = f(x)$ an. Wir führen nun eine Legendre-Transformation zu einer Funktion $g = g(p)$ mit der neuen Variablen (20.2) durch, die zur ursprünglichen Funktion $f = f(x)$ äquivalent ist und damit die gleiche Information enthält. Hierfür ist erforderlich, daß sich $g = g(p)$ eindeutig aus $f = f(x)$ berechnen läßt und umgekehrt. Wir betrachten die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an die Kurve $f = f(x)$:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{20.3}$$



Der Achsenabschnitt der Tangenten führt dann auf

$$g(x_0) = T(0) \overset{(20.3)}{=} f(x_0) - f'(x_0)x_0 \tag{20.4}$$

und hängt natürlich vom betrachteten Punkt x_0 ab. Wir bezeichnen die Funktion $g(x)$ für eine beliebige Stelle x als die Legendre-Transformation von $f(x)$ und erhalten mit (20.2)

$$g(x) = f(x) - xp(x)\,. \tag{20.5}$$

Wir zeigen nun, daß g nur von der Steigung p abhängt. Dazu bilden wir das totale Differential von (20.5):

$$dg = df - xdp - pdx \overset{(20.1),(20.2)}{=} -xdp\,. \tag{20.6}$$

Um die Funktion $g = g(p)$ explizit angeben zu können, müssen wir in

$$g(x) \overset{(20.2),(20.5)}{=} f(x) - xf'(x) \tag{20.7}$$

die Variable x mit Hilfe von (20.2) eliminieren. Das geht aber nur dann, wenn sich (20.2) eindeutig nach x auflösen läßt, wenn also zu f' eine Umkehrfunktion f'^{-1} existiert. Dann kann man

$$x = f'^{-1}(p) \tag{20.8}$$

in (20.7) einsetzen und erhält explizit die Funktion

$$g(p) = f(f'^{-1}(p)) - f'(f'^{-1}(p))p\,. \tag{20.9}$$

Wir zeigen nun, daß die Legendre-Transformation involutorisch ist, daß also zweimalige Anwendung der Legendre-Transformation wieder auf die ursprüngliche Funktion führt. Die Steigung der Legendre-Transformierten $g(p)$ lautet nach (20.6)

$$-x = g'(p)\,, \tag{20.10}$$

so daß sich die Legendre-Transformation von $g(p)$ analog zu (20.5) ergibt als

$$g - p(-x) \overset{(20.5)}{=} f\,. \tag{20.11}$$

Als Beispiel führen wir die Legendre-Transformation für die Funktion

$$f(x) = x^2 \tag{20.12}$$

durch. Der Zusammenhang zwischen alter und neuer Variable lautet dann nach (20.2) und (20.8)

$$p = f'(x) \overset{(20.12)}{=} 2x \quad \Rightarrow \quad x = f'^{-1}(p) = \frac{p}{2}\,. \tag{20.13}$$

Damit ergibt sich die Legendre-Transformierte (20.9) zu

$$g(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p}{2}p = -\frac{1}{4}p^2 \tag{20.14}$$

Wir bemerken, daß die durch (20.2) und (20.9) definierte Legendre-Transformation in der Thermodynamik verwendet wird, um Umrechnungen zwischen den thermodynamischen Potentialen wie der inneren Energie U, der freien Energie F, der Enthalpie H und der freien Enthalpie G vorzunehmen.

20.2 Hamilton-Funktion

Wir betrachten nun eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ mit $q = (q_1, \ldots, q_f)$ und $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$ und führen bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ eine Legendre-Transformation durch. Hierzu definiert man die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion L nach den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ als neue Variablen

$$p_\nu = p_\nu(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_\nu}; \quad \nu = 1, \ldots, f\,. \tag{20.15}$$

Man bezeichnet p_ν als den zur generalisierten Koordinate q_ν kanonisch konjugierten generalisierten Impuls. Wir nehmen an, daß sich die Beziehung (20.15) zwischen den generalisierten Geschwindigkeiten und Impulsen invertieren läßt zu

$$\dot{q}_\nu = \dot{q}_\nu(q, p, t); \quad \nu = 1, \ldots, f \tag{20.16}$$

mit $p = (p_1, \ldots, p_f)$. Die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ ist dann nicht durch (20.9) sondern durch derem Negativen definiert und führt auf die Hamilton-Funktion

$$H(q, p, t) = \sum_{\mu=1}^{f} \dot{q}_\mu(q, p, t) p_\mu - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)\,. \tag{20.17}$$

Entscheidend ist hierbei, daß die Hamilton-Funktion (20.17) von den generalisierten Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_f)$ und den dazu kanonisch konjugierten Impulsen $p = (p_1, \ldots, p_f)$ und nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$ abhängt.

20.3 Hamilton-Gleichungen

Wir berechnen nun die partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion (20.17) unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen (17.31):

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \overset{(20.17)}{=} \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_\nu} p_\mu - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_\nu} \overset{(20.15)}{=} -\frac{\partial L}{\partial q_\nu} \overset{(17.31)}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \overset{(20.15)}{=} -\dot{p}_\nu, \tag{20.18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\nu} \overset{(20.17)}{=} \dot{q}_\nu + \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu} p_\mu - \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial p_\nu} \overset{(20.15)}{=} \dot{q}_\nu, \tag{20.19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \overset{(20.17)}{=} \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial t} p_\mu - \sum_{\mu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} \overset{(20.15)}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{20.20}$$

Die ersten beiden Gleichungen (20.18), (20.19) sind die sogenannten Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_\nu(t) = \frac{\partial H(q(t),p(t),t)}{\partial p_\nu(t)}\,, \quad \dot{p}_\nu(t) = -\frac{\partial H(q(t),p(t),t)}{\partial q_\nu(t)}\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{20.21}$$

Es handelt sich hierbei um $2f$ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, die die Lagrange-Gleichungen (17.31) als f gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung ersetzen. Die Lagrange- und die Hamilton-Gleichungen sind daher alternative Formulierungen der Bewegungsgleichungen.

20.4 Hamilton-Prinzip

Wir zeigen nun, daß sich die Hamilton-Gleichungen (20.21) auch aus dem Hamiltonschen Prinzip ableiten lassen. Hierzu lösen wir die Legendre-Transformation (20.17) nach der Lagrange-Funktion L auf, so daß die Wirkung (18.58) übergeht in

$$\mathcal{A}\left[q(t),p(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu=1}^{f} \dot{q}_\mu(t) p_\mu(t) - H\left(q(t),p(t),t\right) \right) dt\,. \tag{20.22}$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich die Bewegungsgleichungen durch Extremalisierung der Wirkung. Da in der Hamiltonschen Mechanik die generalisierten Koordinaten und Impulse als unabhängige Variablen aufgefaßt werden, müssen sie unabhängig voneinander variiert werden. Dies führt dann zur folgenden Variation der Wirkung (20.22):

$$\delta\mathcal{A}\left[q(t),p(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu=1}^{f} \left(\delta\dot{q}_\mu(t) p_\mu(t) + \dot{q}_\mu(t)\delta p_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial q_\mu(t)}\delta q_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial p_\mu(t)}\delta p_\mu(t) \right) dt\,. \tag{20.23}$$

Da die Operationen Variation und totale Zeitableitung miteinander vertauschen,

$$\delta\frac{d}{dt}q_\mu(t) = \frac{d}{dt}\delta q_\mu(t)\,, \tag{20.24}$$

kann man im ersten Term von (20.23) eine partielle Integration durchführen und erhält

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}\left[q(t),p(t)\right] \;=\; & \sum_{\mu=1}^{f} \left(p_\mu(t_2)\delta q_\mu(t_2) - p_\mu(t_1)\delta q_\mu(t_1)\right) \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu=1}^{f} \left(-\delta q_\mu(t)\dot{p}_\mu(t) + \dot{q}_\mu(t)\delta p_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial q_\mu(t)}\delta q_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial p_\mu(t)}\delta p_\mu(t) \right) dt\,. \end{aligned} \tag{20.25}$$

Wie in der Variationsrechnung üblich verlangen wir, daß die Variationen der generalisierten Koordinaten am Anfangs- und Endpunkt verschwinden.

$$\delta q_\nu(t_1) = \delta q_\nu(t_2) = 0; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{20.26}$$

so daß die Randterme in (20.25) entfallen. An die Variationen der generalisierten Impulse am Anfangs- und Endpunkt stellen wir dagegen keine Anforderungen:

$$\delta p_\nu(t_1),\, \delta p_\nu(t_2) \text{ beliebig}; \quad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{20.27}$$

Damit reduziert sich die Variation der Wirkung (20.25) auf

$$\delta\mathcal{A}\left[q(t),p(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\mu=1}^{f} \left[\dot{q}_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial p_\mu(t)} \right] \delta p_\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{f} \left[-\dot{q}_\mu(t) - \frac{\partial H}{\partial q_\mu(t)} \right] \delta q_\mu(t) \right\}\,. \tag{20.28}$$

Da die Variationen der generalisierten Koordinaten und Impulse $\delta q_\mu(t), \delta p_\mu(t)$ vollkommen beliebig sind, ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip, daß die Variation der Wirkung in (20.28) verschwindet, die Hamilton-Gleichungen (20.21).

20.5 Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld ist im SI-Einheitensystem durch (17.47) gegeben. Der generalisierte Impuls ergibt sich zu

$$p_i \overset{(20.15)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \overset{(17.47)}{=} m\dot{x}_i + QA_i(x,t)\,. \tag{20.29}$$

Er unterscheidet sich vom kinetischen Impuls durch einen zuätzlichen Anteil, der vom elektromagnetischen Feld herrührt. Die Beziehung (20.29) zwischen generalisiertem Impuls und generalisierter Geschwindigkeit läßt sich unmittelbar invertieren

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m} - \frac{Q}{m}A_i(x,t)\,. \tag{20.30}$$

Die Legendre-Transformation (20.17) der Lagrange-Funktion (17.47) führt demnach auf die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^{3} p_j \left(\frac{p_j}{m} - \frac{Q}{m}A_j(x,t)\right) - \sum_{j=1}^{3}\frac{m}{2}\left(\frac{p_j}{m} - \frac{Q}{m}A_j(x,t)\right)^2 + Q\varphi(x,t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{3} QA_j(x,t)\left(\frac{p_j}{m} - \frac{Q}{m}A_j(x,t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{p_j^2}{2m} - \frac{Q}{m}p_jA_j(x,t) + \frac{Q^2}{2m}A_j(x,t)^2\right) + Q\varphi(x,t) \\ \Rightarrow H &= \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2m}\left(p_j - QA_j(x,t)\right)^2 + Q\varphi(x,t)\,. \end{aligned} \tag{20.31}$$

Die Hamilton-Gleichungen dieses Systems lauten

$$\dot{x}_i \overset{(20.19)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_i} \overset{(20.31)}{=} \frac{1}{m}\left(p_i - QA_i(x,t)\right), \tag{20.32}$$

$$\dot{p}_i \overset{(20.18)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x_i} \overset{(20.31)}{=} -Q\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i} + \frac{Q}{m}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j - QA_j(x,t)\right)\frac{\partial A_j(x,t)}{\partial x_i}\,. \tag{20.33}$$

Eliminiert man den Impuls aus den Hamilton-Gleichungen (20.32), (20.33), so ergeben sich die Newton-Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &\overset{(20.32)}{=} \dot{p}_i - Q\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i(x,t)}{\partial t}\right) \\ &\overset{(20.32),(20.33)}{=} -Q\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i} - Q\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial t} + Q\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j\,. \end{aligned} \tag{20.34}$$

Auf das geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld wirkt demnach die Lorentz-Kraft (17.45).

20.6 Poisson-Klammern

Wir betrachten eine beliebige Funktion $O(q,p,t)$ der generalisierten Koordinaten $q = (q_1,\ldots,q_f)$ und der dazu kanonisch konjugierten Impulse $p = (p_1,\ldots,p_f)$. Entlang einer beliebigen Bahn

ändert sie sich zeitlich gemäß der Kettenregel wie folgt:

$$\frac{d}{dt}O(q(t),p(t),t) = \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial O}{\partial q_\nu(t)}\dot{q}_\nu(t) + \frac{\partial O}{\partial p_\nu(t)}\dot{p}_\nu(t)\right) + \frac{\partial O}{\partial t}\,. \tag{20.35}$$

Wenn diese Bahn eine Lösung der Hamilton-Gleichungen darstellt, können wir (20.21) in (20.35) einsetzen und finden

$$\frac{dO}{dt} = \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial O}{\partial q_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} - \frac{\partial O}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\right) + \frac{\partial O}{\partial t}\,. \tag{20.36}$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, als neues Symbol die Poisson-Klammer zwischen zwei Funktionen $A(q,p,t)$ und $B(q,p,t)$ einzuführen:

$$\{A,B\}_{q,p} = \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\nu}\frac{\partial B}{\partial p_\nu} - \frac{\partial A}{\partial p_\nu}\frac{\partial B}{\partial q_\nu}\right)\,. \tag{20.37}$$

Sie besitzt die folgenden, leicht zu beweisenden Eigenschaften:

$$\{A_1+A_2,B\}_{q,p} = \{A_1,B\}_{q,p} + \{A_2,B\}_{q,p}\,, \tag{20.38}$$

$$\{A,B_1+B_2\}_{q,p} = \{A,B_1\}_{q,p} + \{A,B_2\}_{q,p}\,, \tag{20.39}$$

$$a\{A,B\}_{q,p} = \{aA,B\}_{q,p} = \{A,aB\}_{q,p}, \quad a \text{ konstant}\,, \tag{20.40}$$

$$\{A,B\}_{q,p} = -\{B,A\}_{q,p}\,. \tag{20.41}$$

Außerdem genügt die Poisson-Klammer der Jacobi-Identität

$$\{A,\{B,C\}_{q,p}\}_{q,p} + \{B,\{C,A\}_{q,p}\}_{q,p} + \{C,\{A,B\}_{q,p}\}_{q,p} = 0\,, \tag{20.42}$$

wie man durch explizites Nachrechnen einsehen kann.

Wenn die Poisson-Klammer zwischen A und B verschwindet, d.h.

$$\{A,B\}_{q,p} = 0\,, \tag{20.43}$$

so sagt man, daß diese Größen miteinander vertauschbar sind. In der Hamiltonschen Mechanik werden die generalisierten Koordinaten q_ν und die dazu kanonisch konjugierten Impulse p_ν als unabhängige Variablen aufgefaßt

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial q_\mu} = \delta_{\nu\mu}\,, \quad \frac{\partial q_\nu}{\partial p_\mu} = \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} = 0\,, \quad \frac{\partial p_\nu}{\partial p_\mu} = \delta_{\nu\mu}\,, \tag{20.44}$$

so daß die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{q_\nu,q_\mu\}_{q,p} \overset{(20.37)}{=} \sum_{\kappa=1}^{f}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial q_\kappa}\frac{\partial q_\mu}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial q_\nu}{\partial p_\kappa}\frac{\partial q_\mu}{\partial q_\kappa}\right) \overset{(20.44)}{=} 0\,, \tag{20.45}$$

$$\{q_\nu,p_\mu\}_{q,p} \overset{(20.37)}{=} \sum_{\kappa=1}^{f}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial q_\kappa}\frac{\partial p_\mu}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial q_\nu}{\partial p_\kappa}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\kappa}\right) \overset{(20.44)}{=} \delta_{\nu\mu}\,, \tag{20.46}$$

$$\{p_\nu,p_\mu\}_{q,p} \overset{(20.37)}{=} \sum_{\kappa=1}^{f}\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\kappa}\frac{\partial p_\mu}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial p_\nu}{\partial p_\kappa}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\kappa}\right) \overset{(20.44)}{=} 0\,, \tag{20.47}$$

gelten. Mit Hilfe der Poisson-Klammer (20.37) geht die zeitliche Änderung der Funktion O in (20.36) über in

$$\frac{dO}{dt} = \{O,H\}_{q,p} + \frac{\partial O}{\partial t}\,. \tag{20.48}$$

Offensichtlich sind die Hamilton-Gleichungen (20.21) selbst ein Spezialfall von (20.48)

$$\frac{dq_\nu}{dt} \overset{(20.48)}{=} \{q_\nu, H\}_{q,p} \overset{(20.37)}{=} \sum_{\kappa=1}^{f} \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial q_\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial q_\nu}{\partial p_\kappa}\frac{\partial H}{\partial q_\kappa} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\,, \tag{20.49}$$

$$\frac{dp_\nu}{dt} \overset{(20.48)}{=} \{p_\nu, H\}_{q,p} \overset{(20.37)}{=} \sum_{\kappa=1}^{f} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial p_\nu}{\partial p_\kappa}\frac{\partial H}{\partial q_\kappa} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}\,. \tag{20.50}$$

Eine nicht explizit von der Zeit abhängige Funktion $O(q,p)$, die mit der Hamilton-Funktion vertauscht, d.h.

$$\{O, H\}_{q,p} = 0\,, \tag{20.51}$$

ist wegen (20.48) eine Erhaltungsgröße. Insbesondere kommt es häufig vor, daß die Hamilton-Funktion selbst zeitunabhängig, d.h. von der Form

$$H = H(p,q) \tag{20.52}$$

ist. Da die Hamilton-Funktion trivialerweise wegen der Antisymmetrie der Poisson-Klammer (20.41) mit sich selbst vertauscht, ist dann die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße längs des klassischen Pfades.

Wir beweisen nun noch den Poissonschen Satz, wonach die Poisson-Klammern zweier Integrale der Bewegung selbst wieder ein Integral der Bewegung ist. Es seien A und B zwei Integrale der Bewegung, d.h. es gelte

$$\{A, H\}_{q,p} = \{B, H\}_{q,p} = 0\,. \tag{20.53}$$

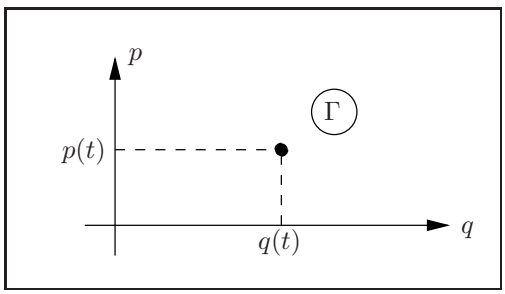
Dann folgt aus der Jacobi-Identität (20.42)

$$\{\{A, B\}_{q,p}, H\}_{q,p} = 0\,, \tag{20.54}$$

so daß auch $\{A, B\}_{q,p}$ ein Integral der Bewegung ist.

20.7 Liouvillscher Satz

In der Hamiltonschen Mechanik werden die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ und die dazu kanonisch konjugierten Impulse $p_1, \ldots, p_f$ als unabhängige Variablen aufgefaßt. Faßt man diese $2f$ unabhängigen Variablen zusammen, so entsteht der $2f$-dimensionale Phasenraum Γ. Der Zustand eines mechanischen Systems zur Zeit t wird dann durch den Punkt $(q_1(t), \ldots, q_f(t), p_1(t), \ldots, p_f(t))$ im Phasenraum Γ charakterisiert:



Wir betrachten als Beispiel den eindimensionalen harmonischen Oszillator, dessen Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \tag{20.55}$$

auf den kanonisch konjugierten Impuls

$$p \overset{(20.15)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \overset{(20.55)}{=} m\dot{q} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \tag{20.56}$$

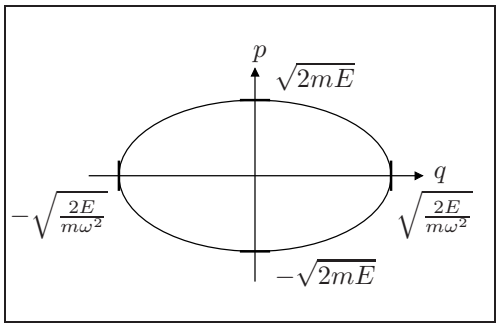
führt. Durch eine Legendre-Transformation (20.17) erhalten wir die Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = p\frac{p}{m} - \left\{ \frac{m}{2}\frac{p^2}{m^2} - \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \right\} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \,. \tag{20.57}$$

Da diese nicht explizit von der Zeit abhängt, stellt diese eine Erhaltungsgröße in Form der Energie E dar:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \,. \tag{20.58}$$

Für die Trajektorie im Phasenraum Γ bedeutet dies, daß sie eine Ellipse darstellt:



Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Fall zurück und betrachten ein hochdimensionales mechanisches System, wie beispielsweise ein ideales Gas, bestehend aus 10^{23} Teilchen, das in einem Volumen eingeschlossen ist. Obwohl in der klassischen Mechanik die genaue Bewegung des Systems vollständig durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist, ist es für solch komplizierte Systeme unmöglich, die Lösungen der Bewegungsgleichungen zu berechnen. Hinzu kommt, daß die Anfangsbedingungen oft nur unvollständig bekannt sind. Wir können zwar festlegen, daß zur Anfangszeit t_0 eine gegebene Masse eines Gases eine bestimmte Energie hat, aber wir können nicht die Anfangskoordinaten und -geschwindigkeiten jedes Moleküls bestimmen. Die statistische Mechanik, die sich mit solchen Systemen beschäftigt, die sehr viele Teilchen enthalten, versucht daher nicht, eine vollständige Lösung zu gewinnen. Ihr Ziel besteht vielmehr darin, Voraussagen über mittlere Eigenschaften zu machen, indem die Bewegung einer großen Zahl identischer Systeme untersucht wird. Wir betrachten demnach ein Ensemble von vielen mechanischen Systemen mit derselben Hamiltonfunktion $H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$, die sich nur durch ihre Anfangsbedingungen voneinander unterscheiden. Da jedes System durch einen einzelnen Punkt im Phasenraum Γ dargestellt wird, entspricht dem Ensemble von Systemen ein Punktschwarm im Phasenraum Γ. Zur Anfangszeit t_0 führen wir deshalb eine Punktschwarmdichte $\rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0)$ ein, wobei $\rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^0 \ldots dp_f^0$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß im Ensemble die Anfangsbedingung $(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0)$ vorliegt. Da mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendeine Anfangsbedingung realisiert ist, lautet die Normierung der Punktschwarmdichte

$$\int_\Gamma \rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^0 \ldots dp_f^0 = 1 \,. \tag{20.59}$$

Die Punktschwarmdichte ρ entwickelt sich mit der Zeit von $\rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0)$ zu $\rho(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t, t)$ und es stellt sich die Frage, welcher Bewegungsgleichung die Punktschwarmdichte $\rho(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t, t)$ genügt. Hierzu betrachten wir ein beliebiges Gebiet M^0 im Phasenraum Γ. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Ensemble Anfangsbedingungen in M^0 vorliegen,

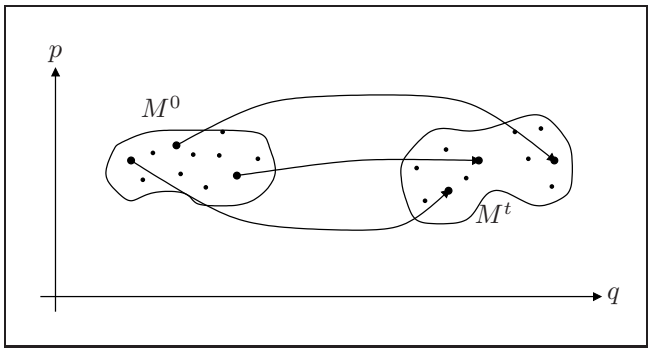
ist gegeben durch

$$W(M^0) = \int\limits_{M^0} \rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^0 \ldots dp_f^0 \,. \tag{20.60}$$

Die Trajektorien jedes einzelnen Systems genügen den Hamilton-Gleichungen (20.21) mit den Anfangsbedingungen

$$q_\nu^t\big|_{t=t_0} = q_\nu^0, \quad p_\nu^t\big|_{t=t_0} = p_\nu^0\,; \quad \nu = 1, \ldots, f\,. \tag{20.61}$$

Durch die zeitliche Entwicklung haben die einzelnen Punkte $(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0)$ in M^0 neue Stellen $(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t)$ im Phasenraum Γ erreicht. Insgesamt gesehen wird dadurch M_0 zur Zeit t_0 in eine neue Untermenge M^t zur Zeit t übergeführt:



Die Wahrscheinlichkeit, daß im Ensemble zur Zeit t der Punktschwarm in M^t liegt, lautet

$$W(M^t) = \int\limits_{M^t} \rho(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t, t) dq_1^t \ldots dq_f^t dp_1^t \ldots dp_f^t \,. \tag{20.62}$$

Der Liouvillsche Satz besagt nun, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten (20.60) und (20.62) gleich sind, da keine Schwarmpunkte im Phasenraum Γ erzeugt oder vernichtet werden können:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M^0} \rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^t \ldots dp_f^0 \\ &\qquad = \int\limits_{M^t} \rho(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t, t) dq_1^t \ldots dq_f^t dp_1^t \ldots dp_f^t \,. \end{aligned} \tag{20.63}$$

Um hieraus eine Differentialgleichung für die Punktschwarmdichte $\rho(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t, t)$ gewinnen zu können, muß man auf der rechten Seite von (20.63) eine Koordinatentransformation durchführen und die neuen Koordinaten $(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t)$ in die alten Koordinaten $(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0)$ umrechnen:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M^0} \rho(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^0 \ldots dp_f^0 \\ &\quad = \int\limits_{M^0} \rho\big(q_1^t(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t), \ldots, q_f^t(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t)\,, \\ &\qquad p_1^t(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t), \ldots, p_f^t(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0, t), t\big) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial(q_1^t, \ldots, q_f^t, p_1^t, \ldots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \ldots, q_f^0, p_1^0, \ldots, p_f^0)} dq_1^0 \ldots dq_f^0 dp_1^0 \ldots dp_f^0 \,. \end{aligned} \tag{20.64}$$

Dabei transformiert sich ein infinitesimales Volumenelement im Phasenraum mit der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1^t}{\partial q_1^0} & \cdots & \frac{\partial q_f^t}{\partial q_1^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial q_1^0} & \cdots & \frac{\partial p_f^t}{\partial q_1^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial q_f^0} & \cdots & \frac{\partial q_f^t}{\partial q_f^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial q_f^0} & \cdots & \frac{\partial p_f^t}{\partial q_f^0} \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial p_1^0} & \cdots & \frac{\partial q_f^t}{\partial p_1^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial p_1^0} & \cdots & \frac{\partial p_f^t}{\partial p_1^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial p_f^0} & \cdots & \frac{\partial q_f^t}{\partial p_f^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial p_f^0} & \cdots & \frac{\partial p_f^t}{\partial p_f^0} \end{vmatrix} . \tag{20.65}$$

Führt man zwei Koordinatentransformationen hintereinander aus

$$q_\nu^{t_1} = q_\nu^{t_1}(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t_1), p_\nu^{t_1}(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t_1)\,; \quad \nu=1,\ldots,f, \tag{20.66}$$

$$q_\nu^{t_2} = q_\nu^{t_2}(q_1^{t_1},\ldots,q_f^{t_1},p_1^{t_1},\ldots,p_f^{t_1},t_2), p_\nu^{t_2}(q_1^{t_1},\ldots,q_f^{t_1},p_1^{t_1},\ldots,p_f^{t_1},t_2); \quad \nu=1,\ldots,f\,, \tag{20.67}$$

so gilt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial(q_1^{t_2},\ldots,q_f^{t_2},p_1^{t_2},\ldots,p_f^{t_2})}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)} = \frac{\partial(q_1^{t_2},\ldots,q_f^{t_2},p_1^{t_2},\ldots,p_f^{t_2})}{\partial(q_1^{t_1},\ldots,q_f^{t_1},p_1^{t_1},\ldots,p_f^{t_1})} \frac{\partial(q_1^{t_1},\ldots,q_f^{t_1},p_1^{t_1},\ldots,p_f^{t_1})}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\,. \tag{20.68}$$

Setzen wir $t_2 = t_1 + \epsilon$, so ergibt die Taylor-Entwicklung von (20.67) im Limes $\epsilon \to 0$:

$$q_\nu^{t_1+\epsilon} = q_\nu^{t_1} + \dot{q}_\nu^{t_1}\epsilon + \ldots, \quad p_\nu^{t_1+\epsilon} = p_\nu^{t_1} + \dot{p}_\nu^{t_1}\epsilon + \ldots; \quad \nu = 1,\ldots,f \tag{20.69}$$

und die erste Jacobi-Determinante auf der rechten Seite von (20.68) lautet

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(q_1^{t_1+\epsilon},\ldots,q_f^{t_1+\epsilon},p_1^{t_1+\epsilon},\ldots,p_f^{t_1+\epsilon})}{\partial(q_1^{t_1},\ldots,q_f^{t_1},p_1^{t_1},\ldots,p_f^{t_1})} \\ &= \begin{vmatrix} 1+\epsilon\frac{\partial\dot{q}_1^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{q}_f^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}}+\cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_1^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_f^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}}+\cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon\frac{\partial\dot{q}_1^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}}+\cdots & \cdots & 1+\epsilon\frac{\partial\dot{q}_f^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}}+\cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_1^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_f^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}}+\cdots \\ \epsilon\frac{\partial\dot{q}_1^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{q}_f^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}}+\cdots & 1+\epsilon\frac{\partial\dot{p}_1^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_f^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}}+\cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon\frac{\partial\dot{q}_1^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}}+\cdots & \cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{q}_f^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}}+\cdots & \epsilon\frac{\partial\dot{p}_1^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}}+\cdots & \cdots & 1+\epsilon\frac{\partial\dot{p}_f^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}}+\cdots \end{vmatrix} \\ &= 1+\epsilon\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial\dot{q}_\nu^{t_1}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial\dot{p}_\nu^{t_1}}{\partial p_\nu}\right)+\cdots . \end{aligned} \tag{20.70}$$

Damit führt die Zeitableitung der Jacobi-Determinante (20.65) auf

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\\
&\quad= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial(q_1^{t+\epsilon},\ldots,q_f^{t+\epsilon},p_1^{t+\epsilon},\ldots,p_f^{t+\epsilon})}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}-\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\right)\\
&\quad\overset{(20.68),\ (20.70)}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(1+\epsilon\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial\dot q_\nu^{t_1}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial\dot p_\nu^{t_1}}{\partial p_\nu}\right)-1\right)\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\\
&\quad= \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial\dot q_\nu^{t_1}}{\partial q_\nu}+\frac{\partial\dot p_\nu^{t_1}}{\partial p_\nu}\right)\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\overset{(20.21)}{=}0\,.
\end{aligned}\tag{20.71}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\left.\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}\right|_{t=t_0}=1\tag{20.72}$$

führt die Integration von (20.71) auf

$$\frac{\partial(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)}{\partial(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)}=1\,.\tag{20.73}$$

Einsetzen von (20.73) in (20.64) ergibt

$$\int\limits_{M^0}\left\{\rho(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t_0)-\rho(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t,t)\right\}dq_1^0\ldots dq_f^0dp_1^0\ldots dp_f^0=0\tag{20.74}$$

für alle Gebiete M^0, so daß die Punktschwarmdichte an einer mit dem Hamilton-Strom mitschwimmenden Stelle zeitlich konstant bleibt:

$$\rho(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t_0)=\rho(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t,t)\,.\tag{20.75}$$

Setzen wir beispielsweise

$$\rho(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t_0)=\begin{cases}\rho_0; & (q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)\in M^0\\ 0; & (q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0)\notin M^0,\end{cases}\tag{20.76}$$

so lesen wir aus (20.75) ab

$$\rho(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t,t)=\begin{cases}\rho_0; & (q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)\in M^t\\ 0; & (q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t)\notin M^t.\end{cases}\tag{20.77}$$

Dann besagt (20.74), daß das Volumen des Gebietes M^0 mit dem des Gebietes M^t übereinstimmt:

$$V(M^0)=V(M^t)\,.\tag{20.78}$$

Hieraus ergibt sich die Aussage des Liouvillschen Satzes, wonach das Volumen eines beliebigen Gebietes im Phasenraum erhalten bleibt, wenn sich die Punkte seiner Begrenzung entsprechend durch den Hamilton-Gleichungen bewegen. Der Fluß im Phasenraum entspricht also demnach dem einer inkompressiblen Flüssigkeit. Differenzieren wir (20.75) nach der Zeit, t, so folgt

$$\frac{d}{dt}\rho(q_1^t,\ldots,q_f^t,p_1^t,\ldots,p_f^t,t)=0\,.\tag{20.79}$$

Demnach ergibt sich aus (20.48) und (20.79) die Liouville-Gleichung für die Punktschwarmdichte im Phasenraum:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\{\rho,H\}_{q,p}\,.\tag{20.80}$$

Kapitel 21

Kanonische Transformationen

In diesem Kapitel werden weitere grundlegende Eigenschaften des Hamilton-Formalismus untersucht. Insbesondere betrachten wir die Möglichkeit, die generalisierten Koordinaten und Impulse so zu transformieren, daß sich die Struktur der Hamilton-Gleichungen nicht ändert. Wir werden sehen, daß sich solche kanonischen Transformationen aus einer einzelnen skalaren Funktion ergeben, die deshalb auch als Erzeugende bezeichnet wird.

21.1 Transformation von Koordinaten und Impulsen

In Abschnitt 17.5 wurde gezeigt, daß man in der Lagrangeschen Mechanik von ursprünglichen generalisierten Koordinaten $q_\nu, \nu = 1, \ldots, f$ zu neuen generalisierten Koordinaten $Q_\alpha, \alpha = 1, \ldots, f$ übergehen kann. Die Form der Lagrange-Gleichungen ändert sich bei einer solchen Transformation nicht. Man muß lediglich die Transformation der generalisierten Koordinaten (17.57) und die daraus folgende Transformation der generalisierten Geschwindigkeiten (17.58) in die ursprüngliche Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ einsetzen, um die neue Lagrange-Funktion $L(Q, \dot{Q}, t)$ gemäß (17.59) zu erhalten. Welche Koordinaten man dann tatsächlich verwendet, um ein mechanisches Problem zu lösen, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit.

Wir untersuchen nun in der Hamiltonschen Mechanik Transformationen der $2f$ unabhängigen Variablen, also der generalisierten Koordinaten $q_\nu, \nu = 1, \ldots, f$ und der dazu kanonisch konjugierten Impulse $p_\nu, \nu = 1, \ldots, f$ in neue Koordinaten $Q_\alpha, \alpha = 1, \ldots, f$ und Impulse $P_\alpha, \alpha = 1, \ldots, f$:

$$q_\nu = q_\nu(P, Q, t); \quad p_\nu = p_\nu(P, Q, t); \nu = 1, \ldots, f\,. \tag{21.1}$$

Bei diesem Ansatz handelt es sich um eine wesentlich größere Klasse von Transformationen als die in Abschnitt 17.5 untersuchten Punkttransformationen (17.57). Eine solche Transformation (21.1) heißt kanonisch, genau dann, wenn sie die Form der Hamilton-Gleichungen erhält. Dies bedeutet, daß die von der ursprünglichen Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ abgeleitete Hamilton-Gleichungen (20.21) durch den Ansatz (21.1) so transformiert werden, daß es eine neue Hamilton-Funktion $H'(q, \dot{q}, t)$ gibt, die auf die neuen Hamilton-Gleichungen

$$\dot{Q}_\alpha(t) = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha(t)}\,, \quad \dot{P}_\alpha(t) = \frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha(t)}\,; \quad \alpha = 1, \ldots, f\,. \tag{21.2}$$

führt. Dabei stellt sich die Frage, wie die neue Hamilton-Funktion $H'(Q, P, t)$ aus der alten hervorgeht. Hierzu erinnern wir uns daran, daß sich die ursprüngliche Hamilton-Gleichungen (20.21) gemäß Abschnitt 20.4 aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{f} \dot{q}_\nu(t) p_\nu(t) - H(q(t), p(t), t) \right\} dt = 0 \tag{21.3}$$

ableiten lassen. Ganz entsprechend ergeben sich die neuen Hamilton-Gleichungen (21.2) aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{Q}_\alpha(t) P_\alpha(t) - H(Q(t), P(t), t) \right\} dt = 0 \tag{21.4}$$

Aus der Identität von (21.3) und (21.4) folgt jedoch nicht, daß die Integranden gleich sein müssen, es ist ausreichend, wenn sie sich nur um die totale Ableitung einer beliebigen Funktion $F(p, q, P, Q, t)$ nach der Zeit unterscheiden:

$$\sum_{\nu=1}^{f} \dot{q}_\nu(t) p_\nu(t) - H(q(t), p(t), t) = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{Q}_\alpha(t) P_\alpha(t) - H(Q(t), P(t), t) + \frac{d}{dt} F(q(t), p(t), Q(t), P(t), t)\,. \tag{21.5}$$

Beim Hamiltonschen Prinzip führt nämlich ein solcher Zusatzterm zu Variationen am Anfangs- und Endpunkt t_1 und t_2, die nach den Regeln der Variationsrechnung verschwinden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(q(t), p(t), Q(t), P(t), t) dt = \delta \big[f(q(t), p(t), Q(t), P(t), t) \big]_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{21.6}$$

Wie wir gleich sehen werden, bestimmt die Funktion $F(q, p, Q, P, t)$ die Transformationsgleichungen (21.1). Man bezeichnet sie deshalb als die Erzeugende oder erzeugende Funktion der kanonischen Transformation.

Bei einer kanonischen Transformation kann man von den insgesamt $4f$ Variablen lediglich $2f$ als unabhängig voneinander ansehen. Deshalb kann man davon ausgehen, daß die Erzeugende eine Funktion dieser $2f$ unabhängigen Variablen ist. In der Regel wählt man die $2f$ unabhängigen Variablen so aus, daß f Variablen den alten Koordinaten bzw. Impulse und f Variablen den neuen Koordinaten bzw. Impulse entsprechen. Aus historischer Sicht sind dabei die vier folgenden Fälle von Erzeugenden bedeutsam:

$$F_1 = F_1(q, Q, t)\,; \quad F_2 = F_2(q, P, t)\,; \quad F_3 = F_3(p, Q, t)\,; \quad F_4 = F_4(p, P, t)\,. \tag{21.7}$$

Wir untersuchen zuerst den Fall der ersten Erzeugenden F_1 und zeigen dann, wie sich daraus die anderen Fälle ergeben.

21.2 Erste Erzeugende

Wir gehen von (21.5) für die erste Erzeugende F_1 aus:

$$\sum_{\nu=1}^{f} \dot{q}_\nu p_\nu - H(q, p, t) = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{Q}_\alpha P_\alpha - H'(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t)\,. \tag{21.8}$$

Die Erzeugende F_1 hängt von den alten und neuen generalisierten Koordinaten ab, so daß dessen totale Ableitung lautet

$$\frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) = \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{21.9}$$

Wir setzen (21.9) in (21.8) ein

$$\sum_{\nu=1}^{f} \dot{q}_\nu p_\nu - H(p, q, t) = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{Q}_\alpha P_\alpha - H'(Q, P, t) + \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} \dot{Q}_\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{21.10}$$

und berücksichtigen, daß die generalisierten Koordinaten q_ν und Q_α als unabhängig angesehen werden. Dies bedeutet, daß die Koeffizienten vor den entsprechenden generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ und $\dot{Q}_\alpha$ einzeln verschwinden müssen und wir erhalten die Transformationsgleichungen

$$p_\nu = \frac{\partial F_1}{\partial q_\nu}; \quad \nu = 1, \ldots, f, \tag{21.11}$$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}; \quad \alpha = 1, \ldots, f, \tag{21.12}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{21.13}$$

Die f Gleichungen (21.11) enthalten nur die Größen p_ν, q_ν, Q_α und t. Sie können nach den f neuen generalisierten Koordinaten Q_α als Funktion der p_ν, q_ν und t aufgelöst werden:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t); \quad \alpha = 1, \ldots, f. \tag{21.14}$$

Setzt man diese Beziehung in (21.12) ein, so ergeben sich auch die neuen generalisierten Impulse als Funktion der q_ν, p_ν und t:

$$P_\alpha = P_\alpha(q, p, t); \quad \alpha = 1, \ldots, f. \tag{21.15}$$

Durch Invertieren des Zusammenhangs zwischen alten und neuen Variablen gehen (21.14) und (21.15) in (21.1) über. Die neue Hamilton-Funktion ergibt sich damit gemäß (21.13):

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1(q(Q, P, t), Q, t)}{\partial t}. \tag{21.16}$$

21.3 Harmonischer Oszillator

Wir untersuchen, wie sich die Erzeugende

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q \tag{21.17}$$

auf den harmonischen Oszillator auswirkt, dessen Hamilton-Funktion schon in (20.57) bestimmt wurde. Zunächst erhalten wir:

$$p \overset{(21.11)}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q} \overset{(21.17)}{=} m\omega q \cot Q, \tag{21.18}$$

$$P \overset{(21.12)}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \overset{(21.17)}{=} \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}. \tag{21.19}$$

Hierbei läßt sich (21.19) unmittelbar nach q auflösen

$$q(Q, P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \tag{21.20}$$

so daß sich auch P berechnen läßt:

$$p(Q, P) \overset{(21.18)}{=} m\omega q(Q, P) \cot Q \overset{(21.20)}{=} \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \tag{21.21}$$

Damit können wir die neue Hamilton-Funktion angeben::

$$\begin{aligned} H'(Q, P) &\overset{(21.16),\ (21.17)}{=} H(q(Q, P), p(Q, P)) \overset{(20.57),\ (21.20),\ (21.21)}{=} \frac{1}{2m} 2m\omega P \cos^2 Q + \frac{m}{2}\omega^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q \\ &= \omega P. \end{aligned} \tag{21.22}$$

Die Erzeugende (21.17) bewirkt demnach eine kanonische Transformation, bei der der neue Impuls mit der neuen Hamilton-Funktion identifiziert werden kann. Der Vergleich von (20.57) mit (21.22) zeigt, daß die durchgeführte kanonische Transformation die Hamilton-Funktion insofern vereinfacht hat, als die neue generalisierte Koordinate Q zyklisch ist. Die neuen Hamilton-Gleichungen (21.2) lauten mit (21.22)

$$\dot{Q}(t) = \omega, \quad \dot{P}(t) = 0 \tag{21.23}$$

und führen auf die Lösung

$$Q(t) = \omega t + Q_0, \qquad P(t) = \text{konstant} = \frac{H'}{\omega} = \frac{E}{\omega}\,. \tag{21.24}$$

Einsetzen von (21.24) in (21.20), (21.21) ergibt die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + Q_0)\,, \quad p(t) = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + Q_0)\,. \tag{21.25}$$

Das hier behandelte Beispiel läßt die Frage offen, wie man eine geeignete Erzeugende findet, so daß sich die Hamilton-Funktion und damit die Hamilton-Gleichungen vereinfachen. Ein Standardverfahren zur Bestimmung einer geeigneten Erzeugenden wird erst im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie im nächsten Kapitel diskutiert. Das Beispiel zeigt aber, daß jede Erzeugende zu einer bestimmten kanonischen Transformation führt und damit das vorgegebene mechanische System abbildet. In der Regel wird dies aber nicht zu einer Vereinfachung der Hamilton-Funktion führen.

21.4 Zweite Erzeugende

Um von der ersten Erzeugenden $F_1(q, Q, t)$ zu der zweiten Erzeugenden $F_2(q, P, t)$ zu gelangen, muß man die neuen generalisierten Koordinaten Q_α durch die neuen Impulse P_α austauschen. Da sich die neuen Impulse P_α gemäß (21.12) durch partielle Ableitung der ersten Erzeugenden $F_1(q, Q, t)$ nach den neuen generalisierten Koordinaten Q_α ergeben, liegt es nahe, F_2 durch eine Legendre-Transformation aus F_1 zu gewinnen:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha P_\alpha\,. \tag{21.26}$$

Zur Kontrolle bilden wir das totale Differential

$$dF_2 \overset{(21.26)}{=} \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial F_1}{\partial q_\nu}dq_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}dQ_\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt + \sum_{\alpha=1}^{f}(P_\alpha dQ_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha) \tag{21.27}$$

$$\overset{(21.12)}{=} \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial F_1}{\partial q_\nu}dq_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f}Q_\alpha dP_\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt \tag{21.28}$$

und sehen, daß die zweite Erzeugende F_2 tatsächlich eine Funktion von q_ν, P_α und t ist. Löst man (21.26) nach der ersten Erzeugenden F_1 auf und setzt sie in (21.8) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{f}\dot{q}_\nu p_\nu - H(q,p,t) &= \sum_{\alpha=1}^{f}\dot{Q}_\alpha P_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{d}{dt}\left\{F_2(q,P,t) - \sum_{\alpha=1}^{f}P_\alpha Q_\alpha\right\} \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{f}Q_\alpha\dot{P}_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F_2(q,P,t)\,. \end{aligned} \tag{21.29}$$

Mit der totalen Zeitableitung von F_2

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial F_2}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{21.30}$$

geht (21.29) über in

$$\sum_{\nu=1}^{f} \dot{q}_\nu p_\nu - H(q,p,t) = -\sum_{\alpha=1}^{f} \dot{P}_\alpha Q_\alpha - H'(Q,P,t) + \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial F_2}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}\dot{P}_\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{21.31}$$

Da die alten generalisierten Koordinaten q_ν und die neuen Impulse P_α als unabhängig angesehen werden, ergibt der Koeffizientenvergleich in (21.31) die Transformationsgleichungen

$$p_\nu = \frac{\partial F_2}{\partial q_\nu}\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{21.32}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}\,; \quad \alpha = 1,\ldots,f\,, \tag{21.33}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{21.34}$$

Die f Gleichungen (21.32) lassen sich nach den neuen Impulsen P_α auflösen und führen deshalb auf (21.15). Setzt man dann (21.15) in (21.33) ein, so erhält man auch noch (21.14). Als weiteres Beispiel betrachten wir die Erzeugende

$$F_2(q,P,t) = \sum_{\nu=1}^{f} q_\nu P_\nu\,. \tag{21.35}$$

Die Transformationsgleichungen (21.32)-(21.34) zeigen, daß es sich hierbei um die identische Transformation handelt:

$$p_\nu \overset{(21.32)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial q_\nu} \overset{(21.35)}{=} P_\nu\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{21.36}$$

$$Q_\alpha \overset{(21.33)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \overset{(21.35)}{=} q_\alpha\,; \quad \alpha = 1,\ldots,f\,, \tag{21.37}$$

$$H' \overset{(21.34)}{=} H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \overset{(21.35)}{=} H\,. \tag{21.38}$$

Wir bemerken, daß auch die Vertauschung von generalisierten Koordinaten und Impulsen eine kanonische Transformation darstellt (vgl. 31. Übungsaufgabe).

21.5 Dritte und vierte Erzeugende

Der Vollständigkeit halber diskutieren wir noch die letzten beiden Erzeugenden in (21.7). Die dritte Erzeugende geht aus der ersten Erzeugenden $F_1(q,Q,t)$ durch Vertauschung der alten generalisierten Koordinaten q_ν und Impulse p_ν hervor. Aufgrund von (21.11) führen wir hierzu die Legendre-Transformation

$$F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_{\nu=1}^{f} q_\nu p_\nu \tag{21.39}$$

durch. Aus (21.8) und (21.39) folgt demnach

$$-\sum_{\nu=1}^{f} q_\nu \dot{p}_\nu - H(q,p,t) = \sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha P_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{d}{dt}F_3(p,Q,t)\,, \tag{21.40}$$

so daß die Transformationsgleichungen lauten

$$q_\nu = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\nu}\,; \quad \nu = 1\,,\ldots,f\,, \tag{21.41}$$

$$P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{21.42}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}\,. \tag{21.43}$$

Entsprechend ergibt sich die vierte Erzeugende $F_4(p,P,t)$ aus der ersten Erzeugenden $F_1(q,Q,t)$ aufgrund von (21.11) und (21.12) durch die doppelte Legendre-Transformation

$$F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha P_\alpha - \sum_{\nu=1}^{f} q_\nu p_\nu \,. \tag{21.44}$$

Dadurch geht (21.8) über in

$$-\sum_{\nu=1}^{f} q_\nu \dot{p}_\nu - H(q,p,t) = -\sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha \dot{P}_\alpha - H'(Q,P,t) + \frac{d}{dt} F_4(p,P,t)\,, \tag{21.45}$$

so daß hier die Transformationsgleichungen

$$q_\nu = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\nu}\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{21.46}$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}\,; \quad \alpha = 1,\ldots,f\,, \tag{21.47}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{21.48}$$

21.6 Bedingungen für kanonische Transformationen

Wir betrachten nun eine beliebige Transformation der alten generalisierten Koordinaten q_ν und Impulse p_ν zu neuen generalisierten Koordinaten Q_α und Impulsen P_α gemäß (21.14) und (21.15). Wir wollen der Frage nachgehen, ob es eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gibt, daß diese Transformation kanonisch ist. Dabei wollen wir uns der Einfachheit darauf beschränken, daß diese Transformation (21.14), (21.15) nicht explizit zeitabhängig ist. Wenn diese Transformation kanonisch ist, gibt es für sie eine Erzeugende F, die wegen der Transformationsgleichungen von z.B. (21.11), (21.12) auch nicht explizit zeitabhängig sein kann. Die Beziehung zwischen alter und neuer Hamilton-Funktion in z.B. (21.13) reduziert sich in diesem Fall auf die Identität

$$H' = H \tag{21.49}$$

und aus dem Hamiltonschen Prinzip (21.3), (21.4) folgt gemäß (21.5)

$$\sum_{\nu=1}^{f} p_\nu dq_\nu - \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha dQ_\alpha = dF\,. \tag{21.50}$$

Wir betrachten die alten generalisierten Koordinaten q_ν und Impulse p_ν als unabhängige Variablen, so daß die in (21.50) auftretenden totalen Differentiale von $Q_\alpha = Q_\alpha(q,p)$ und $F = F(q,p)$ gegeben sind durch

$$dQ_\alpha = \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} dp_\nu \right)\,, \tag{21.51}$$

$$dF = \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial F}{\partial p_\nu} dp_\nu \right)\,. \tag{21.52}$$

Einsetzen von (21.51) und (21.52) in (21.50) führt auf

$$\sum_{\nu=1}^{f} p_\nu dq_\nu - \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} dp_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial F}{\partial p_\nu} dp_\nu \right)\,, \tag{21.53}$$

so daß der Koeffizientenvergleich der unabhängigen totalen Differentiale dq_ν und dp_ν ergibt:

$$p_\nu - \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} = \frac{\partial F}{\partial q_\nu}\,, \tag{21.54}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} = \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\,. \tag{21.55}$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz müssen die zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen $Q_\alpha = Q_\alpha(q,p)$ und $F = F(q,p)$ miteinander vertauschen. Eine partielle Ableitung von (21.54) nach q_μ führt auf:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_\alpha}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \right) \tag{21.56}$$

bzw. durch Vertauschung von μ und ν auf

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial q_\mu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_a}{\partial q_\nu \partial q_\mu} \right)\,, \tag{21.57}$$

so daß sich aus der Differenz von (21.56) und (21.57) nach dem Satz von Schwarz ergibt

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\mu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu} \right) = 0\,. \tag{21.58}$$

Entsprechend führt eine partielle Ableitung von (21.55) nach p_μ auf

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_a}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right)\,, \tag{21.59}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_\nu \partial p_\mu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_a}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \right)\,, \tag{21.60}$$

und der Satz von Schwarz liefert

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} \right) = 0\,. \tag{21.61}$$

Schließlich wird (21.54) nach p_μ differenziert, während in (21.55) der Index ν durch μ ersetzt und dann nach q_ν differenziert wird:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial q_\nu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_\alpha}{\partial p_\mu \partial q_\nu} \right) + \delta_{\mu\nu}\,, \tag{21.62}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial p_\mu} = -\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} + P_\alpha \frac{\partial^2 Q_\alpha}{\partial q_\nu \partial p_\mu} \right)\,. \tag{21.63}$$

Mit dem Satz von Schwarz folgt aus (21.62) und (21.63)

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} \right) = \delta_{\nu\mu}\,. \tag{21.64}$$

Führen wir analog zur Poisson-Klammer (20.37) die Lagrange-Klammer

$$[A,B]_{Q,P} = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial A}\frac{\partial P_\alpha}{\partial B} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial B}\frac{\partial P_\alpha}{\partial A} \right) \tag{21.65}$$

ein, so lassen sich (21.58), (21.61) und (21.64) als fundamentale Lagrange-Klammern schreiben:

$$[q_\nu, q_\mu]_{Q,P} = [p_\nu, p_\mu]_{Q,P} = 0, \qquad [q_\nu, p_\mu]_{Q,P} = \delta_{\nu\mu}\,. \tag{21.66}$$

Wir wollen nun diese Bedingung (21.66) für kanonische Transformationen von Lagrange- auf Poisson-Klammern umschreiben. Hierzu definieren wir uns die beiden folgenden $2f \times 2f$-Matrizen, die aus den ersten partiellen Ableitungen der neuen generalisierten Koordinaten Q_α und Impulse P_α nach den alten generalisierten Koordinaten q_ν und Impulsen p_ν bestehen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_f} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial q_f} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_f} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_f} \\ \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial p_f} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial p_f} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_f} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \tag{21.67}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & -\frac{\partial Q_1}{\partial p_f} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial Q_f}{\partial p_1} & \cdots & -\frac{\partial Q_f}{\partial p_f} & \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_f} \\ \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_f} & -\frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & -\frac{\partial P_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_f}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial p_f} & -\frac{\partial P_f}{\partial q_1} & \cdots & -\frac{\partial P_f}{\partial q_f} \end{pmatrix}. \tag{21.68}$$

Für das Matrizenprodukt von A und B erhalten wir

$$\begin{aligned} (A\cdot B)_{\nu\mu} &= \sum_{\alpha=1}^{2f} A_{\nu\alpha}B_{\alpha\mu} \overset{(21.67),(21.68)}{=\!=} \sum_{\alpha=1}^{f} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu} & \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu} & \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} & \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu} \\ \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu} & -\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\mu} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{f} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} & \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\mu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} & \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\mu}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} \end{pmatrix} \\ &\overset{(21.65)}{=} \begin{pmatrix} [q_\nu, p_\mu]_{Q,P} & -[q_\nu, q_\mu]_{Q,P} \\ [p_\nu, p_\mu]_{Q,P} & -[p_\nu, q_\mu]_{Q,P} \end{pmatrix} \overset{(21.66)}{=} \begin{pmatrix} \delta_{\nu\mu} & 0 \\ 0 & \delta_{\nu\mu} \end{pmatrix} \\ &= E_{\nu\mu}\,, \end{aligned} \tag{21.69}$$

wobei E die $2f \times 2f$-Einheitsmatrix darstellt. Es folgt demnach

$$AB = E \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}\,, \tag{21.70}$$

so daß auch gelten muß

$$BA = E\,. \tag{21.71}$$

Die Auswertung von (21.71) führt entsprechend auf

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)_{\alpha\beta} &= \sum_{\nu=1}^{2f} A_{\alpha\nu}B_{\nu\beta} \overset{(21.67),(21.68)}{=\!=} \sum_{\nu=1}^{f} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu} & \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu} \\ \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu} & -\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu} & \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu} \\ \dfrac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu} & \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{f} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\dfrac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu} - \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\dfrac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu} & \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\dfrac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu} - \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\dfrac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu} \\ \dfrac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu} - \dfrac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu} & \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu} - \dfrac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu}\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu} \end{pmatrix} \\
&\overset{(21.65)}{=} \begin{pmatrix} \{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} & \{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} \\ -\{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} & -\{P_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} \end{pmatrix} \overset{(21.66)}{=} \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\
&= E_{\alpha\beta}\,, \qquad (21.72)
\end{aligned}$$

und damit auf die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = \{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = 0\,, \quad \{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{21.73}$$

Bezüglich der neuen Koordinaten und Impulse gelten andererseits die zu (20.45)-(20.47) analogen Poisson-Klammern

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{Q,P} = \{P_\alpha, P_\beta\}_{Q,P} = 0\,, \quad \{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{21.74}$$

Wir können deshalb unser Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen: Wenn die Transformation (21.14), (21.15) kanonisch ist, folgt daraus die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern (21.73), (21.74). Es handelt sich dabei um eine notwendige Bedingung für eine kanonische Transformation. Verfolgen wir unsere Herleitung aber zurück, so sehen wir, daß es sich auch um eine hinreichende Bedingung handelt. Aus der Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern (21.73) folgen nämlich die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial q_\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_\mu q_\nu}\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_\nu \partial p_\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu p_\nu}\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_\nu \partial p_\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu q_\nu}\,, \tag{21.75}$$

so daß sich (21.54) und (21.55) integrieren lassen und auf die Erzeugende $F(q,p)$ einer kanonischen Transformation führen. Im Falle eines einzelnen Freiheitsgrades $f = 1$ reduziert sich die notwendige und hinreichende Bedingung auf

$$\{Q, P\}_{q,p} = 1 \tag{21.76}$$

bzw. durch Vertauschen der alten und neuen Variablen auf

$$\{q, p\}_{Q,P} = 1\,. \tag{21.77}$$

Als Beispiel betrachten wir die Transformation (21.20), (21.21) und berechnen deren Poisson-Klammer:

$$\begin{aligned}
\{q,p\}_{Q,P} &\overset{(20.37)}{=} \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} \\
&\overset{(21.20),\ (21.21)}{=} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q\sqrt{\frac{2m\omega}{P}}\frac{1}{2}\cos Q - \sqrt{\frac{2}{m\omega P}}\frac{1}{2}\sin Q\sqrt{2m\omega P}(-\sin Q) \\
&= 1\,. \qquad (21.78)
\end{aligned}$$

Demnach handelt es sich bei (21.20), (21.21) tatsächlich um eine kanonische Transformation.

Wir zeigen abschließend, daß aus der Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern die Invarianz aller Poisson-Klammern folgt:

$$
\begin{aligned}
\{A,B\}_{q,p} &\overset{(20.37)}{=} \sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\nu}\frac{\partial B}{\partial p_\nu}-\frac{\partial A}{\partial p_\nu}\frac{\partial B}{\partial q_\nu}\right)\\
&= \sum_{\nu=1}^{f}\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu}+\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu}\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu}+\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu}\right)\right\}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f}\left\{\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu}-\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu}-\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu}\right).\\
&\quad+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\nu}-\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\nu}\right)\\
&\quad\left.+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\nu}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\nu}-\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\nu}\right)\right\}\\
&\overset{(20.37)}{=} \sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\{Q_\alpha,Q_\beta\}_{q,p}+\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\{Q_\alpha,P_\beta\}_{q,p}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\beta}\{P_\alpha,Q_\beta\}_{q,p}+\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\beta}\{P_\alpha,P_\beta\}_{q,p}\right)\\
&\overset{(21.73)}{=} \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\alpha}\right)\overset{(20.37)}{=}\{A,B\}_{Q,P}\,. \qquad (21.79)
\end{aligned}
$$

Umgekehrt folgt natürlich aus der Invarianz aller Poisson-Klammern (21.79) unmittelbar die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern (21.73).

Kapitel 22

Hamilton-Jacobi-Theorie

22.1 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Gegeben sei eine Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$, so daß die Hamilton-Gleichungen (20.21) zu lösen sind. Wir wollen nun eine kanonische Transformation dahingehend auswählen, daß die neue Hamilton-Funktion $H'(Q,P,t)$ und damit die neuen Hamilton-Gleichungen (21.2) vereinfacht sind. Die denkbar einfachste Hamilton-Funktion $H'(Q,P,t)$ ist trivial

$$H'(Q,P,t) = 0 \tag{22.1}$$

und führt auf Hamilton-Gleichungen

$$\dot{Q}_\alpha(t) \overset{(21.2),(22.1)}{=} 0, \qquad \dot{P}_\alpha(t) \overset{(21.2),(22.1)}{=} 0\,, \tag{22.2}$$

die sich unmittelbar integrieren lassen:

$$Q_\alpha(t) = Q_\alpha = \text{konstant}, \qquad P_\alpha(t) = P_\alpha = \text{konstant}\,. \tag{22.3}$$

Wir suchen nun die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ derjenigen kanonischen Transformation, die die Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ auf die triviale Hamilton-Funktion (22.1) abbildet. Aus (21.34) und (22.1) folgt zunächst die Bedingung

$$H(q,p,t) + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} = 0\,. \tag{22.4}$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen (21.32) geht dann (22.4) in die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über:

$$\begin{aligned} H\left(q_1\ldots,q_f, \frac{\partial F_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f,t)}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial F_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f,t)}{\partial q_f}, t\right) & \\ + \frac{\partial F_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f,t)}{\partial t} &= 0\,. \end{aligned} \tag{22.5}$$

Es handelt sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Erzeugende $F_2(q,P,t)$, wobei die alten generalisierten Koordinaten q_ν und die Zeit t als Variablen auftreten. Die vollständige Lösung von (22.5) beinhaltetet deshalb $f+1$ Integrationskonstanten. Davon ist eine Integrationskonstante trivial, da $F_2(q,P,t)$ selbst nicht explizit in (22.5) enthalten ist. Mit $F_2(q,P,t)$ ist offensichtlich auch $F_2'(q,P,t) = F_2(q,P,t) + f(P)$ eine Lösung von (22.5). Die restlichen f nichttrivialen Integrationskonstanten können wegen (22.3) mit den neuen generalisierten Impulsen P_α identifiziert werden.

Wir denken uns nun die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.5) gelöst und wollen mit der bekannten Erzeugenden $F_2(q,P,t)$ die Lösung der ursprünglichen Hamilton-Gleichungen (20.21)

$$q_\nu = q_\nu(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t), \quad p_\nu = p_\nu(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0,t); \quad \nu=1,\ldots,f \tag{22.6}$$

berechnen. Hierbei bezeichnen q_ν^0 und p_ν^0 die Anfangsdaten der generalisierten Koordinaten q_ν und Impulse p_ν zur Zeit $t=0$. Zunächst werten wir die Transformationsgleichungen (21.32) und (21.33) zur Zeit $t=0$ aus:

$$p_\nu^0 = \frac{\partial F_2(q_1^0,\ldots,q_f^0,P_1,\ldots,P_f,0)}{\partial q_\nu^0}; \quad \nu=1,\ldots,f, \tag{22.7}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q_1^0,\ldots,q_f^0,P_1,\ldots,P_f,0)}{\partial P_\alpha}; \quad \alpha=1,\ldots,f\,. \tag{22.8}$$

Es handelt sich um $2f$ algebraische Gleichungen, aus denen sich die nach (22.3) vorliegenden Integrationskonstanten Q_α und P_α als Funktion der Anfangsdaten q_ν^0 und p_ν^0 ausdrücken lassen:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0), \quad P_\alpha = P_\alpha(q_1^0,\ldots,q_f^0,p_1^0,\ldots,p_f^0); \quad \alpha=1,\ldots,f\,. \tag{22.9}$$

Für beliebige Zeiten t lauten die Transformationsgleichungen (21.34) und (21.35)

$$p_\nu = \frac{\partial F_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f,t)}{\partial q_\nu}; \quad \nu=1,\ldots,f, \tag{22.10}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f,t)}{\partial P_\alpha}; \quad \alpha=1,\ldots,f\,. \tag{22.11}$$

Zunächst kann (22.11) nach den alten generalisierten Koordinaten aufgelöst werden:

$$q_\nu = q_\nu(Q_1,\ldots,Q_f,P_1,\ldots,P_f,t)\,; \quad \nu=1,\ldots,f\,. \tag{22.12}$$

Setzt man (22.12) in (22.10) ein, so ergeben sich schließlich auch die alten generalisierten Impulse

$$p_\nu = p_\nu(Q_1,\ldots,Q_f,P_1,\ldots,P_f,t)\,; \quad \nu=1,\ldots,f\,. \tag{22.13}$$

Aus (22.9), (22.12) und (22.13) folgen schließlich die gesuchten Lösungen (22.6) der Hamilton-Gleichungen (20.21).

Die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ als Lösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung läßt sich physikalisch interpretieren. Hierzu betrachten wir deren totale Zeitableitung, die mit der Lagrange-Funktion identifiziert werden kann:

$$\frac{dF_2(q,P,t)}{dt} = \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial F_2}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial F_2}{\partial Q_\alpha}\dot{P}_\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial t} \overset{(21.32),(22.2),(22.4)}{=\!=} \sum_{\nu=1}^f p_\nu\dot{q}_\nu - H \overset{(20.17)}{=} L\,. \tag{22.14}$$

Die Integration von (22.14) zeigt, daß die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ bis auf eine Integrationskonstante die Wirkung entlang der Bahnkurve darstellt. Deshalb wird sie häufig auch als Hamiltonsche Wirkungsfunktion bezeichnet.

22.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten nun eine Hamilton-Funktion $H(q,p)$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Zur Lösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.5) machen wir den Ansatz

$$F_2(q,P,t) = \tilde{F}_2(q,P) - \tilde{H}(P)t\,, \tag{22.15}$$

der die Abhängigkeiten von den alten generalisierten Koordinaten q_ν und der Zeit t separiert und die Separationskonstante $\widetilde{H}(P)$ enthält. Einsetzen von (22.15) in (22.5) führt auf die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q_1,\ldots,q_f,\frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_f}\right)=\widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f)\,, \tag{22.16}$$

während die Transformationsgleichungen (22.10), (22.11) lauten

$$p_\nu = \frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_\nu};\quad \nu=1,\ldots,f, \tag{22.17}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial\widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f)}{\partial P_\alpha}t\,;\quad \alpha=1,\ldots,f\,. \tag{22.18}$$

Da die Hamilton-Funktion $H(q,p)$ nicht explizit von der Zeit abhängt, kann man die Separationskonstante $\widetilde{H}(P)$ in (22.19) mit der Energie des Systems identifizieren.

Bisher wurde die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\widetilde{F}_2(q,P)$ lediglich als Bestandteil der Hamiltonschen Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ betrachtet. Wir können aber $\widetilde{F}_2(q,P)$ als die Erzeugende einer eigenen kanonischen Transformation auffassen, deren Eigenschaften von der durch $F_2(q,P,t)$ erzeugten kanonischen Transformation etwas verschieden sind. Aus (21.36) und (22.16) folgt, daß die neue Hamiltonsche Funktion gegeben ist durch

$$\widetilde{H}'(\widetilde{Q},P)=\widetilde{H}(P)\,, \tag{22.19}$$

so daß die neuen generalisierten Koordinaten $\widetilde{Q}_\alpha$ zyklisch sind. Die neuen Hamilton-Gleichungen

$$\dot{\widetilde{Q}}_\alpha(t)\overset{(21.2),(22.19)}{=}\frac{\partial\widetilde{H}(P_1(t),\ldots,P_f(t))}{\partial P_\alpha(t)},\quad \dot{P}_\alpha(t)\overset{(21.2),(22.19)}{=}0\,;\quad \alpha=1,\ldots,f \tag{22.20}$$

lassen sich unmittelbar integrieren:

$$\widetilde{Q}_\alpha(t)=\frac{\partial\widetilde{H}(P_1(t),\ldots,P_f(t))}{\partial P_\alpha(t)}t+Q_\alpha,\quad P_\alpha(t)=P_\alpha\,;\quad \alpha=1,\ldots,f\,. \tag{22.21}$$

Die zu den zyklischen generalisierten Koordinaten $\widetilde{Q}_\alpha$ kanonisch konjugierten Impulse sind demnach tatsächlich Erhaltungsgrößen. Die Transformationsgleichungen (21.32), (21.33) von $\widetilde{F}_2(q,P)$

$$p_\nu = \frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_\nu}\,;\quad \nu=1,\ldots,f\,, \tag{22.22}$$

$$\widetilde{Q}_\alpha = \frac{\partial\widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial P_\alpha}\,;\quad \alpha=1,\ldots,f\,, \tag{22.23}$$

sind dann wegen (22.21) offensichtlich mit denen von $F_2(q,P,t)$ in (22.17) und (22.18) identisch.

Die Hamiltonsche charakterische Funktion $\widetilde{F}_2(q,P)$ besitzt eine physikalische Bedeutung, die der der Hamiltonschen Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ sehr ähnlich ist. Für die totale Zeitableitung erhalten wir

$$\frac{d\widetilde{F}_2(q,P)}{dt}=\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial\widetilde{F}_2}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu+\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial\widetilde{F}_2}{\partial p_\alpha}\dot{P}_\alpha\overset{(22.20),(22.22)}{=}\sum_{\nu=1}^{f}p_\nu\dot{q}_\nu\,, \tag{22.24}$$

so daß die Zeitintegration ergibt

$$\widetilde{F}_2(q,P)=\int\sum_{\nu=1}^{f}p_\nu\frac{dq_\nu}{dt}dt=\sum_{\nu=1}^{f}\int p_\nu dq_\nu\,. \tag{22.25}$$

22.3 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als Beispiel den harmonischen Oszillator, dessen Hamilton-Funktion schon in (20.57) aufgestellt wurde. Die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.5) für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ lautet in diesem Fall

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} = 0\,. \tag{22.26}$$

Da die Hamilton-Funktion (20.57) des harmonischen Oszillators nicht explizt zeitabhängig ist, läßt sich die Hamiltonsche Wirkungsfunktion gemäß (22.15) separieren:

$$F_2(q,P,t) = \widetilde{F}_2(q,P) - \widetilde{H}(P)t\,, \tag{22.27}$$

wobei die Separationskonstante $\widetilde{H}(P)$ als Energie des Systems mit dem neuen Impuls als Erhaltungsgröße identifiziert werden kann. In Analogie zu (21.24) setzen wir

$$\widetilde{H}(P) = \omega P\,. \tag{22.28}$$

Durch (22.27) und (22.28) geht (22.26) in die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \widetilde{F}_2(q,P)}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \omega P\,. \tag{22.29}$$

Eine Umformung von (22.29) ergibt

$$\frac{\partial \widetilde{F}_2(q,P)}{\partial q} = \sqrt{2m\left(\omega P - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)}\,, \tag{22.30}$$

so daß sich durch Integration die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt:

$$\widetilde{F}_2(q,P) = \int^q \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2\tilde{q}^2}\,d\tilde{q}\,. \tag{22.31}$$

Hierbei wurde eine nur von P abhängige Integrationskonstante weggelassen. Das Standardintegral

$$\int^x \sqrt{a^2 - z^2}\,dz \overset{\text{(Bronstein)}}{=} \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \tag{22.32}$$

führt dann (22.31) über in

$$\widetilde{F}_2(q,P) = \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}q\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2} + P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q\,. \tag{22.33}$$

Mit dieser Hamiltonschen charakteristischen Funktion läßt sich der Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Variablen berechnen. Als Nebenrechnung betrachten wir zunächst deren partielle Ableitung nach q

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{F}_2(q,P)}{\partial q} &= \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\left\{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2} + \frac{q}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}(-1)\frac{m\omega}{2P}2q\right\} + P\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}\sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}\left\{1-\frac{m\omega}{2P}q^2 - \frac{m\omega}{2P}q^2 + 1\right\} \\
&= \sqrt{2m\omega P}\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2} \\
&\widehat{=} \quad (22.30)
\end{aligned}$$

und nach P

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{F}_2(q,P)}{\partial P} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\frac{1}{2\sqrt{P}}q\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}+\sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\frac{q}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}\frac{m\omega}{2P^2}q^2+\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q\\ &\quad +P\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\frac{(-q)}{2}\frac{1}{P^{3/2}}\\ &= \frac{q}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}}\left\{1-\frac{m\omega}{2P}q^2+\frac{m\omega}{2P}q^2-1\right\}+\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q\\ &= \arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q\,. \end{aligned} \tag{22.34}$$

Aus der Transformationsgleichung (22.18) folgt dann mit (22.28) und (22.34)

$$Q=\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q-\omega t \quad\Rightarrow\quad q(t)=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin(Q+\omega t) \tag{22.35}$$

und aus (22.17), (22.30) und (22.35) ergibt sich

$$P(t)=\sqrt{2m\omega P}\cos(Q+\omega t)\,. \tag{22.36}$$

Unter Berücksichtigung von (22.28) stimmen (22.35) und (22.36) mit (21.25) überein.

Abschließend führen wir bei der Hamiltonschen charakteristischen Funktion (22.33) eine Legendre-Transformation bezüglich des neuen Impulses P durch. Aus der Transformationsgleichung (22.23) ergibt sich mit (22.34)

$$\tilde{Q}=\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q \quad\Rightarrow\quad P=\frac{m\omega}{2}q^2\frac{1}{\sin^2\widetilde{Q}}\,. \tag{22.37}$$

Die Legendre-Transformierte zu $\widetilde{F}_2(q,P)$ ergibt sich dann gemäß (21.26) zu

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1(q,\widetilde{Q}) &= F_2(q,P)-\widetilde{Q}P\\ &\overset{(22.33)}{=} \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}q\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}+P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q-\widetilde{Q}P\\ &\overset{(22.37)}{=} \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2}\frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2\widetilde{Q}}}\sqrt{1-\frac{m\omega q^2}{2}\frac{\sin^2\widetilde{Q}}{\frac{m\omega q^2}{2}}}+\frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2\widetilde{Q}}\\ &\quad \cdot\left\{\arcsin\frac{m\omega q^2}{2}\frac{\sin^2\widetilde{Q}}{\frac{m\omega q^2}{2}}-\widetilde{Q}\right\}\\ \Rightarrow\ \widetilde{F}_1(q,\widetilde{Q}) &= \frac{m\omega}{2}q^2\cot\widetilde{Q}\,. \end{aligned} \tag{22.38}$$

Als Ergebnis haben wir damit die in (21.17) verwendete Erzeugende erhalten.

22.4 Separation der Variablen

Das Verfahren von Hamilton-Jacobi zur Lösung mechanischer Probleme scheint auf den ersten Blick nur von geringer praktischer Bedeutung zu sein. Anstatt die $2f$ gewöhnlichen Hamilton-Gleichungen muß man die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung lösen und partielle Differentialgleichungen sind bekanntlich schwerer als gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die einzelnen Variablen in der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu separieren, so daß die Lösung stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Praktisch ist das

Hamilton-Jacobi-Verfahren nur dann eine nützliche Rechenhilfe, wenn sich eine solche Separation erreichen läßt.

Wir betrachten den Fall, daß die Hamilton-Funktion eines mechanischen Systems von der Form

$$H(q,p) = \sum_{\nu=1}^{f} H_\nu(q_\nu, p_\nu) \tag{22.39}$$

ist, so daß die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.16) lautet

$$\sum_{\nu=1}^{f} H_\nu \left(q_\nu, \frac{\partial \widetilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_\nu} \right) = \widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f)\,. \tag{22.40}$$

Für die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\widetilde{F_2}(q,P)$ machen wir dann den Separationsansatz

$$\widetilde{F_2}(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f) = \sum_{\nu=1}^{f} \widetilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_1,\ldots,P_f)\,, \tag{22.41}$$

so daß (22.40) übergeht in

$$\sum_{\nu=1}^{f} H_\nu \left(q_\nu, \frac{\partial \widetilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_\nu} \right) = \widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f)\,. \tag{22.42}$$

In der gesamten Gleichung (22.42) tritt die Variable q_ν nur im ν-ten Summanden auf der linken Seite auf. Demnach zerfällt die Separationskonstante $\widetilde{H}(P)$ als Gesamtenergie gemäß

$$\widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f) = \sum_{\nu=1}^{f} \widetilde{H}_\nu(P_1,\ldots,P_f)\,, \tag{22.43}$$

und es gilt

$$H_\nu \left(q_\nu, \frac{\partial \widetilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_1,\ldots,P_f)}{\partial q_\nu} \right) = \widetilde{H}_\nu(P_1,\ldots,P_f)\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{22.44}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die einzelnen Separationskonstanten $\widetilde{H}_\nu(P_1,\ldots,P_f)$ mit den neuen Impulsen identifizieren:

$$\widetilde{H}_\nu(P_1,\ldots,P_f) = P_\nu\,; \quad r = 1,\ldots,f\,, \tag{22.45}$$

wobei deren Summe gemäß (22.43) die Energie des Systems ergibt:

$$\widetilde{H}(P_1,\ldots,P_f) = \sum_{\nu=1}^{f} P_\nu\,. \tag{22.46}$$

Setzt man (22.45) in (22.44) ein, so gibt offensichtlich

$$\tilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_1,\ldots,P_f) = \tilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_\nu) \tag{22.47}$$

und eine Umformung ergibt

$$\frac{\partial \tilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_\nu)}{\partial q_\nu} = f_\nu(q_\nu,P_\nu)\,. \tag{22.48}$$

Dies läßt sich unmittelbar integrieren

$$\tilde{F}_{2\nu}(q_\nu,P_\nu) = \int^{q_\nu} f_\nu(\tilde{q}_\nu,P_\nu)d\tilde{q}_\nu\,, \tag{22.49}$$

wobei eine nur von P_ν abhängige Integrationskonstante weggelassen wurde. Durch Einsetzen von (22.47) und (22.49) in (22.41) ist die Hamiltonsche charakteristische Funktion bestimmt.

22.5 Ebene Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einer Ebene in einem Zentralfeld. In kartesischen Koordinaten lautet dessen Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) . \tag{22.50}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie dieses Problems bieten sich als generalisierte Koordinaten die ebenen Polarkoordinaten $q_1 = r$ und $q_2 = \varphi$ an:

$$x = r\cos\varphi, \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi , \tag{22.51}$$

$$y = r\sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi . \tag{22.52}$$

Einsetzen von (22.51) und (22.52) in die Lagrange-Funktion (22.50) führt auf

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) . \tag{22.53}$$

Die zu den generalisierten Koordinaten r und φ kanonisch konjugierten Impulse lauten

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \overset{(22.53)}{=} m\dot{r} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \tag{22.54}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \overset{(22.53)}{=} mr^2\dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \tag{22.55}$$

Durch eine Legendre-Transformation geht die Lagrange- in die Hamilton-Funktion über:

$$\begin{aligned} H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) \\ &\overset{(22.53)-(22.55)}{=} p_r\frac{p_r}{m} + p_\varphi\frac{p_\varphi}{mr^2} - \left(\frac{m}{2}\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{m}{2}r^2\frac{p_\varphi^2}{m^2r^4} - V(r)\right) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) . \end{aligned} \tag{22.56}$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt, ist die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.16) für die Hamiltonsche charakeristische Funktion zu lösen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = \tilde{H}(P_r,P_\varphi) . \tag{22.57}$$

Eine Umformung von (22.57) ergibt

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mr^2\left\{\tilde{H}(P_r,P_\varphi) - V(r) - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial r}\right)^2\right\} , \tag{22.58}$$

so daß die linke Seite nur von φ und die rechte nur von r abhängt. Deshalb müssen beide Seiten gleich einer Konstanten $c^2(P_r,P_\varphi)$ sein. Aus der einen Gleichung

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi} = c(P_r,P_\varphi) \tag{22.59}$$

folgt damit die Separation der Variablen

$$\tilde{F}_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi) = \varphi c(P_r,P_\varphi) + \tilde{F}_2(r,P_r,P_\varphi) , \tag{22.60}$$

so daß die andere Gleichung

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(r, P_r, P_\varphi)}{\partial r} = \sqrt{2m\left\{\tilde{H}(P_r, P_\varphi) - V(r) - \frac{c^2(P_r, P_\varphi)}{2mr^2}\right\}} \tag{22.61}$$

unmittelbar integriert werden kann

$$\tilde{F}_2(r, P_r, P_\varphi) = \int^r \sqrt{2m\{\tilde{H}(P_r, P_\varphi) - V(\tilde{r})\} - \frac{c^2(P_r, P_\varphi)}{\tilde{r}^2}} d\tilde{r}\,. \tag{22.62}$$

Der Einfachheit halber werden die beiden Konstanten $\tilde{H}(P_r, P_\varphi), c(P_r, P_\varphi)$ mit den neuen Impulsen P_r, P_φ identifiziert:

$$\tilde{H}(P_r, P_\varphi) = P_r, \qquad c(P_r, P_\varphi) = P_\varphi\,. \tag{22.63}$$

Die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt sich damit zu

$$\tilde{F}_2(r, \varphi, P_r, P_\varphi) = \varphi P_\varphi + \int^r \sqrt{2m\{P_r - V(\tilde{r})\} - \frac{P_\varphi^2}{\tilde{r}^2}} d\tilde{r}\,. \tag{22.64}$$

Die Transformationsgleichungen (22.18) lauten

$$Q_r = \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \varphi, P_r, P_\varphi)}{\partial P_r} - \frac{\partial \tilde{H}(P_r, P_\varphi)}{\partial P_r} t \overset{(22.63),(22.64)}{=\!=} \int^r \frac{m}{\sqrt{2m(P_r - V(\tilde{r})) - \frac{P_\varphi^2}{\tilde{r}^2}}} d\tilde{r} - t, \tag{22.65}$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \varphi, P_r, P_\varphi)}{\partial P_\varphi} - \frac{\partial \tilde{H}(P_r, P_\varphi)}{\partial P_\varphi} t \overset{(22.63),(22.64)}{=\!=} \varphi - \int^r \frac{\frac{P_\varphi^2}{\tilde{r}^2}}{\sqrt{2m(P_r - V(\tilde{r})) - \frac{P_\varphi^2}{\tilde{r}^2}}} d\tilde{r} \tag{22.66}$$

Hierbei stellt (22.65) eine implizite Gleichung für $r(t)$ dar, die in (22.66) eingesetzt $\varphi(t)$ ergibt. Ist man dagegen an der Bahnkurve $r(\varphi)$ interessiert, so läßt sich diese direkt aus (22.66) berechnen.

22.6 Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir diskutieren nun eine wichtige Modifikation des Hamilton-Jacobi-Verfahrens, das auf periodische Systeme zugeschnitten ist, bei denen man sich häufig mehr für die Frequenzen der Bewegung als z.B. für die konkrete Gestalt der Bahn interessiert. Hierzu betrachten wir zunächst ein einzelnes Paar von kanonisch konjugierten Variablen q und p, d.h. die Projektion des Phasenraumes auf eine einzelne $p-q$-Ebene. Man unterscheidet dann zwei Typen von Periodizitäten:

1. Bei einer **Libration** ist die Phasenbahn eine geschlossene Kurve, so daß q und p periodisch mit der gleichen Periodendauer T sind:

   $$q(t) = q(t+T), \qquad p(t) = p(t+T)\,. \tag{22.67}$$

   Die Libration ist typisch für schwingende Systeme wie z.B. eine Feder.

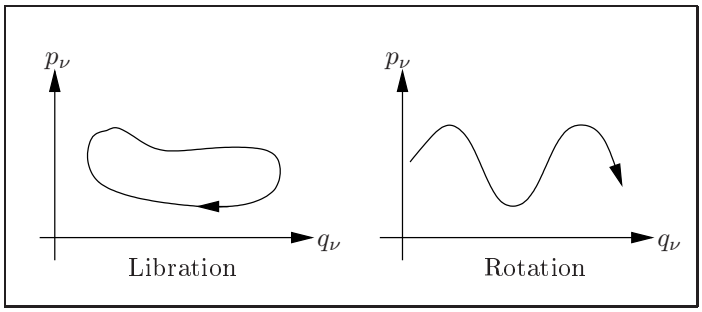
2. Bei einer **Rotation** ist auch p periodisch

   $$p(t) = p(t+T)\,, \tag{22.68}$$

   q dagegen nicht mehr. Die generalisierte Koordinate ändert sich vielmehr nach der Periode T um einen konstanten Wert q_0:

   $$q(t+T) = q(t) + q_0\,. \tag{22.69}$$

   Die Phasenbahn ist nun offen, wobei p jedoch eine periodische Funktion von q ist. Die Rotation tritt beispielsweise bei der Achsendrehung eines starren Körpers auf.



Diese beiden Bewegungstypen lassen sich unter Umständen auch an ein- und demselben System beobachten. Das mathematische Pendel besitzt z.B. die Hamilton-Funktion (vgl. Kapitel 5)

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi\,. \tag{22.70}$$

Da es sich hierbei um ein abgeschlossenes System handelt, kann man die Hamilton-Funktion mit der erhaltenen Energie identifizieren

$$H(\varphi, p_\varphi) = E\,. \tag{22.71}$$

Aus (22.70) und (22.71) erhalten wir den generalisierten Impuls, der dem Drehimpuls des Pendels entspricht:

$$p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\varphi)}\,. \tag{22.72}$$

Damit dieser generalisierte Impuls reell ist, muß der Radikant positiv sein:

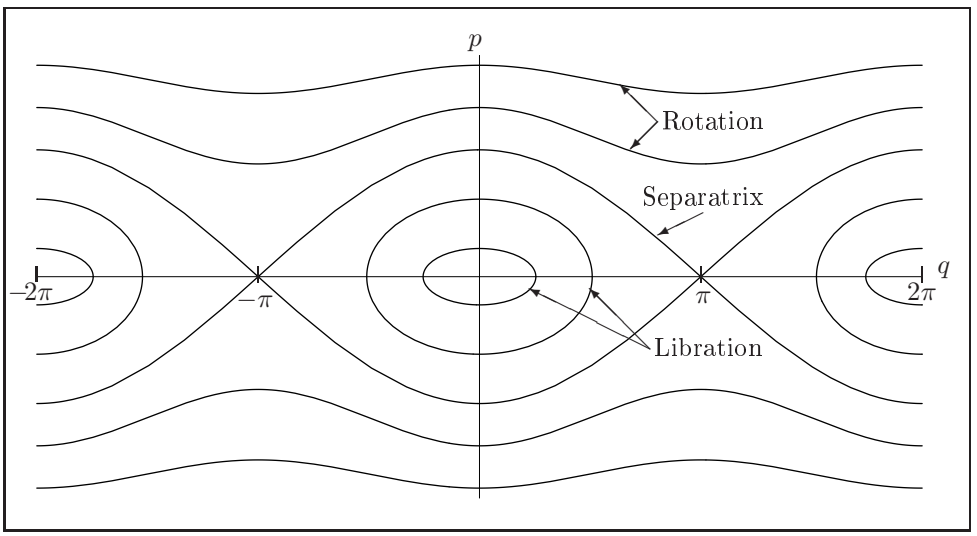
$$\cos\varphi \geq -\frac{E}{mgl}\,. \tag{22.73}$$

Es gibt demnach zwei Fälle:

1. $E < mgl$: Es handelt sich um eine Libration, da eine Auslenkung nur im begrenzten Winkelbereich $[-\varphi_0, \varphi_0]$ mit $\varphi_0 = \arccos(-E/mg)$ möglich ist.

2. $E > mgl$: Es handelt sich um eine Rotation, da alle Winkel φ möglich sind und das Pendel sich überschlägt.

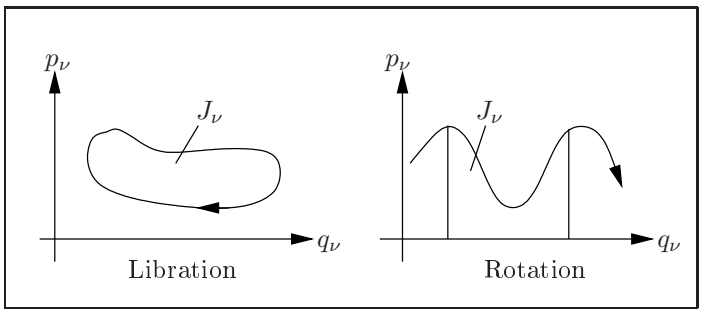
Diese beiden Fälle lassen sich auch im Phasenraum unterscheiden. Dabei werden Libration und Rotation durch eine Separatrix getrennt:



Wir behandeln nun periodische Systeme im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie und betrachten die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\tilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f)$ als bekannt. Die bei der Lösung der zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.16) auftretenden Integrationskonstanten wurden bisher immer unmittelbar mit den neuen Impulsen $P_1,\ldots,P_f$ identifiziert. Diese Wahl ist aber nicht eindeutig, da wir auch irgendwelche Funktionen der Integrationskonstanten mit den neuen Impulsen identifizieren könnten. Für periodische Systeme ist es geschickt, die sogenannten Wirkungsvariablen

$$J_\nu = \oint p_\nu dq_\nu\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f \tag{22.74}$$

als neue Impulse anzusehen. Dabei erfolgt die Integration über eine volle Periode der Libration bzw. der Rotation, so daß wir die Wirkungsvariablen mit den folgenden Flächeninhalten identifizieren können:



Wir identifizieren nun die neuen Impulse $P_1,\ldots,P_f$ in der Hamiltonschen charakteristischen Funktion $\tilde{F}_2$ mit den Wirkungsvariablen $J_1,\ldots,J_f$:

$$\tilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,P_1,\ldots,P_f) \quad\Rightarrow\quad \tilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,J_1,\ldots,J_f)\,. \tag{22.75}$$

Nach (22.16) ist dann auch die neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ ausschließlich eine Funktion der Wirkungsvariablen $J_1,\ldots,J_f$:

$$\tilde{H}(P_1,\ldots,P_f) \quad\Rightarrow\quad \tilde{H}(J_1,\ldots,J_f)\,. \tag{22.76}$$

Wir kommen nun zu den Winkelvariablen $w_1,\ldots,w_f$, die man als die zu den Wirkungsvariablen $J_1,\ldots,J_f$ kanonisch konjugierten Variablen einführt:

$$P_\nu = J_\nu \quad\Leftrightarrow\quad \tilde{Q}_\nu = w_\nu\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{22.77}$$

Wie aus der neuen Hamilton-Funktion (22.76) hervorgeht, sind die Winkelvariablen $w_1,\ldots,w_f$ alle zyklisch. Die Lösung der neuen Hamilton-Gleichungen

$$\dot{w}_\nu(t) \overset{(22.20)}{=} \frac{\partial\tilde{H}(J_1(t),\ldots,J_f(t))}{\partial J_\nu(t)}, \quad \dot{J}_\nu(t) \overset{(22.20)}{=} 0\,; \quad \nu = 1,\ldots,f \tag{22.78}$$

ist dann trivial gegeben durch

$$w_\nu(t) \overset{(22.21)}{=} \nu_\nu t + Q_\nu\,, \quad J_\nu(t) = J_\nu\,; \quad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{22.79}$$

wobei die Frequenzen

$$\nu_\nu = \frac{\partial\tilde{H}(J_1,\ldots,J_f)}{\partial J_\nu}\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f \tag{22.80}$$

auftreten. Außerdem lauten die Transformationsgleichungen (22.22), (22.23) der Hamiltonschen charakteristischen Funktion (22.75)

$$p_\nu = \frac{\partial\tilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,J_1,\ldots,J_f)}{\partial q_\nu}\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f\,, \tag{22.81}$$

$$w_\nu = \frac{\partial\tilde{F}_2(q_1,\ldots,q_f,J_1,\ldots,J_f)}{\partial J_\nu}\,; \qquad \nu = 1,\ldots,f\,. \tag{22.82}$$

Damit haben wir das in Abschnitt 22.2 geschilderte Hamilton-Jacobi-Verfahren lediglich auf Wirkungs- und Winkelvariablen umgeschrieben, aber noch keinen besonderen Vorteil erarbeitet. Deshalb untersuchen wir nun die physikalische Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen, indem wir die Änderung der Winkelvariable w_ν bei einer Änderung der generalisierten Koordinate q_μ über eine volle Periode berechnen:

$$\delta_\mu w_\nu = \oint\limits_\mu dw_\nu = \oint \frac{\partial w_\nu}{\partial q_\mu} dq_\mu \overset{(22.82)}{=} \oint \frac{\partial^2 \tilde{F}_2}{\partial q_\mu \partial J_\nu} dq_\mu = \frac{\partial}{\partial J_\nu} \oint \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_\mu} dq_\mu$$
$$\overset{(22.81)}{=} \frac{\partial}{\partial J_\nu} \oint p_\mu dq_\mu \overset{(22.74)}{=} \frac{\partial J_\mu}{\partial J_\nu} = \delta_{\nu\mu} \,. \tag{22.83}$$

Dies bedeutet, daß sich die Winkelvariable w_ν nur dann ändert, wenn sich $q_\mu = q_\nu$ über eine Periode ändert. Bezeichnet T_ν die Periodendauer von q_ν, so gilt in diesem Fall

$$w_\nu(t + T_\nu) \overset{(22.83)}{=} w_\nu(t) + 1 \,. \tag{22.84}$$

Mit Hilfe von (22.79) besagt dies

$$\nu_\nu(t + T_\nu) + Q_\nu = \nu_\nu + Q_\nu + 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_\nu = \frac{1}{T_\nu} \,. \tag{22.85}$$

Demnach ist die durch (22.80) definierte Größe ν_ν gerade die Frequenz der zu q_ν gehörenden periodischen Bewegung. Hierin liegt die eigentliche Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen, da sie durch (22.80) eine Bestimmung der Frequenzen periodischer Bewegungen gestattet, ohne die vollständige Lösung für die Systembewegung gewonnen zu haben.

Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel des harmonischen Oszillators. Wie schon in Abschnitt 20.7 erläutert, ist die Trajektorie im Phasenraum eine Ellipse mit den Halbachsen

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \,, \qquad p_0 = \sqrt{2mE} \,. \tag{22.86}$$

Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist dann gerade die Wirkungsvariable:

$$J \overset{(22.74)}{=} \oint p \, dq = \pi p_0 q_0 \overset{(22.86)}{=} \pi \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\omega} E \,. \tag{22.87}$$

Die neue Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators, die mit der Energie E identifiziert werden kann, hat dann gemäß (22.87) die einfache Gestalt

$$\tilde{H}(J) = \frac{\omega}{2\pi} J \,. \tag{22.88}$$

Für die Frequenz ν der periodischen Bewegung erhalten wir dann das erwartete Ergebnis

$$\nu \overset{(22.80)}{=} \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J} \overset{(22.88)}{=} \frac{\omega}{2\pi} \,. \tag{22.89}$$

22.7 Kepler-Problem

Das Beispiel des harmonischen Oszillators diente lediglich dazu, die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen zu illustrieren. Der Nutzen dieser Methode zeigt sich erst bei anspruchsvolleren Problemen wie z.B. der Himmelsmechanik. Wir betrachten im folgenden das dreidimensionale Kepler-Problem, dessen Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten durch

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{22.90}$$

mit $\alpha > 0$ gegeben ist. Aufgrund der Rotationssymmetrie wählen wir als generalisierte Koordinaten die Kugelkoordinaten $q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \tag{22.91}$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \tag{22.92}$$

$$z = r\cos\vartheta, \qquad \dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}r\sin\vartheta\,. \tag{22.93}$$

Einsetzen von (22.91)-(22.93) in die Lagrange-Funktion (22.90) führt auf

$$L(r,\vartheta,\varphi,\dot{r},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 r^2\sin^2\vartheta) + \frac{\alpha}{r}\,. \tag{22.94}$$

Die zu den generalisierten Koordinaten r, ϑ, φ kanonisch konjugierten Impulse lauten

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial\dot{r}} \overset{(22.94)}{=} m\dot{r} \qquad \Leftrightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}\,, \tag{22.95}$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} \overset{(22.94)}{=} mr^2\dot{\vartheta} \qquad \Leftrightarrow \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}\,, \tag{22.96}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} \overset{(22.94)}{=} mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}\,. \tag{22.97}$$

Durch eine Legendre-Transformation geht die Lagrange-Funktion (22.94) in die entsprechende Hamilton-Funktion über:

$$\begin{aligned} H(r,\vartheta,\varphi,p_r,p_\vartheta,p_\varphi) &= p_\varphi\dot{\varphi} + p_r\dot{r} + p_\vartheta\dot{\vartheta} - L(r,\vartheta,\varphi,\dot{r},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) \\ &\overset{(22.94)-(22.97)}{=\!=} p_r\frac{p_r}{m} + p_\vartheta\frac{p_\vartheta}{mr^2} + p_\varphi\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta} - \frac{m}{2}\left\{\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\vartheta^2}{m^2r^4}r^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2r^4\sin^4\vartheta}r^2\sin^2\vartheta\right\} - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha}{r}\,. \end{aligned} \tag{22.98}$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt, ist die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (22.16) für die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi) = \tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi,J_\nu,H_\vartheta,J_\varphi)$ zu lösen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial\tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E\,, \tag{22.99}$$

wobei die neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(J_r,J_\vartheta,J_\varphi)$ mit der Energie E identifiziert wird:

$$\tilde{H}(J_r,J_\vartheta,J_\varphi) = E\,. \tag{22.100}$$

Das Problem ist separierbar:

$$\tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi) = \tilde{F}_{2r}(r) + \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta) + \tilde{F}_{2\varphi}(\varphi)\,. \tag{22.101}$$

Da die Variable φ gemäß (22.98) zyklisch ist, wählen wir für $\tilde{F}_{2\varphi}(\varphi)$ die identische Transformation analog zu (21.35):

$$\tilde{F}_{2\varphi}(\varphi) = C_\varphi\varphi\,. \tag{22.102}$$

Einsetzen von (22.101) und (22.102) in (22.99) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial\tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{C_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha}{r} &= E \\ \Rightarrow r^2\left(\frac{\partial\tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{r} + E\right)2mr^2 &= -\left(\frac{\partial\tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\,. \end{aligned} \tag{22.103}$$

Da die linke Seite nur von r und die rechte nur von ϑ abhängig ist, muß jede Seite für sich bereits eine Konstante sein:

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{C_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = C_\vartheta^2, \tag{22.104}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r}\right)^2 + \frac{C_\vartheta^2}{r^2} = 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right). \tag{22.105}$$

Hierbei stellen $E, C_\varphi, C_\vartheta$ die Integrationskonstanten dar. Die physikalische Bedeutung von E ist offensichtlich die Energie des Systems. Um auch die anderen Integrationskonstanten C_φ und C_ϑ physikalisch interpretieren zu können, betrachten wir die Komponenten des Drehimpulsvektors

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} m \tag{22.106}$$

in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} L_x &\overset{(22.106)}{=} m(y\dot{z} - z\dot{y}) \overset{(22.92),(22.93)}{=\!=} m\big\{r\sin\vartheta\sin\varphi(\dot{r}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}r\sin\vartheta) \\ &\quad -r\cos\vartheta(\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\cos\varphi)\big\} \\ &= mr^2\{-\dot{\vartheta}\sin\varphi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\}, \end{aligned} \tag{22.107}$$

$$\begin{aligned} L_y &\overset{(22.106)}{=} m(z\dot{x} - x\dot{z}) \overset{(22.91),(22.93)}{=\!=} m\big\{r\cos\vartheta(\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\vartheta\sin\varphi) \\ &\quad -r\sin\vartheta\cos\varphi(\dot{r}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}r\sin\vartheta)\big\} \\ &= mr^2\{\dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\}, \end{aligned} \tag{22.108}$$

$$\begin{aligned} L_z &\overset{(22.106)}{=} m(x\dot{y} - y\dot{x}) \overset{(22.91),(22.92)}{=\!=} m\big\{r\sin\vartheta\cos\varphi(\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\varphi\sin\varphi + \dot{\varphi}r\sin\vartheta\cos\varphi) \\ &\quad -r\sin\vartheta\sin\varphi(\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\vartheta\sin\varphi)\big\} \\ &= mr^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta. \end{aligned} \tag{22.109}$$

Für das Quadrat des Drehimpulsvektors erhalten wir dann in Kugelkoordinaten:

$$\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \overset{(22.107)-(22.109)}{=\!=} m^2r^4\{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\} \overset{(22.96),(22.97)}{=\!=} p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}. \tag{22.110}$$

Aus den Transformationsgleichungen (22.81) folgt für die generalisierte Koordinate φ

$$p_\varphi \overset{(22.81)}{=} \frac{\partial \tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} \overset{(22.101)}{=} \frac{\partial \tilde{F}_{2\varphi}(\varphi)}{\partial\varphi} \overset{(22.102)}{=} C_\varphi \overset{(22.97),(22.109)}{\Longrightarrow} C_\varphi = p_\varphi = L_z \tag{22.111}$$

und entsprechend für die generalisierte Koordinate ϑ

$$\begin{aligned} p_\vartheta^2 &\overset{(22.81)}{=} \left(\frac{\partial \tilde{F}_2(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right)^2 \overset{(22.101)}{=} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 \overset{(22.104)}{=} C_\vartheta^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \overset{(22.111)}{=} C_\vartheta^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \\ \Rightarrow C_\vartheta^2 &= p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \overset{(22.110)}{=} \vec{L}^2. \end{aligned} \tag{22.112}$$

Demnach entspricht die Integrationskonstante C_φ gerade der z-Komponente des Drehimpulses $\vec{L}$ und die Integrationskonstante C_ϑ dem Betrag des Drehimpulsvektors $\vec{L}$.

Wir berechnen nun die einzelnen Wirkungsvariablen

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi \,, \tag{22.113}$$

$$J_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta \,, \tag{22.114}$$

$$J_r = \oint p_r dr \,. \tag{22.115}$$

Die Wirkungsvariable J_φ ergibt sich unmittelbar aus (22.81), (22.101), (22.102) und (22.113):

$$J_\varphi = 2\pi C_\varphi \,. \tag{22.116}$$

Bei der Berechnung der Wirkungsvariable J_ϑ ist zu beachten, daß der Impuls

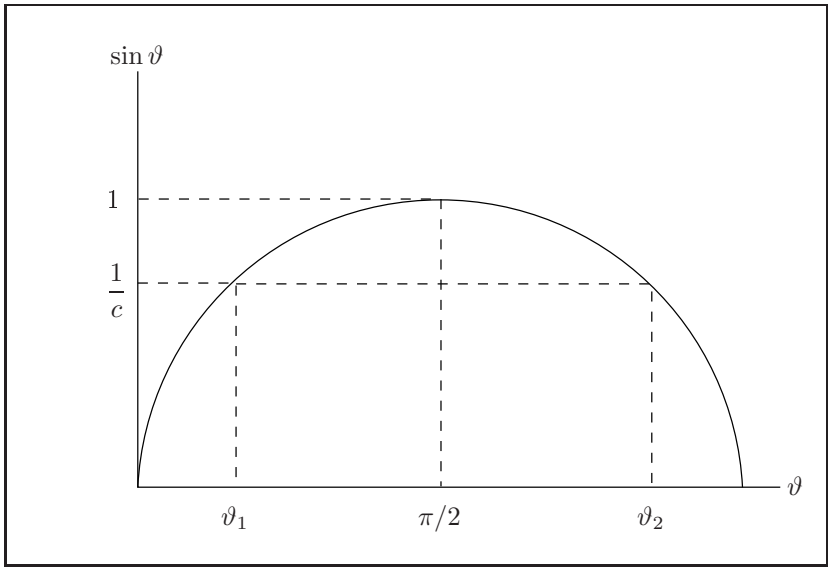
$$P_\vartheta \overset{(22.81),(22.101)}{=} \frac{\partial \widetilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \overset{(22.104)}{=} \pm\sqrt{C_\vartheta^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} \tag{22.117}$$

reell sein muß. Es gilt demnach

$$\sin^2\vartheta \geq \frac{1}{c^2}, \quad c = \frac{c_\vartheta}{c_\varphi} \,, \tag{22.118}$$

so daß es Umkehrpunkte ϑ_1 und ϑ_2 gibt mit

$$\vartheta_1 = \arcsin\frac{1}{c}, \quad \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1 \,. \tag{22.119}$$



Wertet man das Umlaufintegral (22.114) aus, so muß man in (22.117) für das Integral von ϑ_1 nach ϑ_2 das positive und für das Integral von ϑ_2 nach ϑ_1 das negative Vorzeichen verwenden. Deshalb ist nach (22.114), (22.117)-(22.119) zu berechnen

$$J_\vartheta = 2c_\varphi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \,. \tag{22.120}$$

Die Stammfunktion des in (22.120) auftretenen Integrals lautet

$$\int \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta = \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{\cos\vartheta} + c\arctan\frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{c\cos\vartheta} \,, \tag{22.121}$$

wie man durch explizites Differenzieren nachweisen kann. Bei der Integration von $\vartheta_1 < \pi/2$ nach $\vartheta_2 > \pi/2$ in (22.120) werden die Argumente der arctan- und der arccot-Funktion in (22.121) an der Stelle $\vartheta = \pi/2$ singulär. Deshalb ist das Integral in (22.120) von ϑ_1 nach ϑ_2 in die beiden Integrale von ϑ_1 nach $\pi/2$ und von $\pi/2$ nach ϑ_2 aufzuspalten:

$$J_\vartheta \overset{(22.120)}{=} 2c_\varphi \left\{ \int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta + \int_{\pi/2}^{\vartheta_2} \sqrt{C^2 - \frac{1}{\sin^2 2\vartheta}}\, d\vartheta \right\}$$

$$\overset{(22.121)}{=} 2c_\varphi \left\{ \left[\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{\cos\vartheta} + c \arctan \frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{c\cos\vartheta} \right]_{\vartheta_1}^{\pi/2} \right. \tag{22.122}$$

$$\left. + \left[\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{\cos\vartheta} + c \arctan \frac{\sqrt{c^2\sin^2\vartheta - 1}}{c\cos\vartheta} \right]_{\pi/2}^{\vartheta_2} \right\} . \tag{22.123}$$

Wertet man als Integrationsgrenzen die beiden Umkehrpunkte ϑ_1 und ϑ_2 aus, so ergeben sich aufgrund von (22.119) keine Beiträge. An der Integrationsgrenze $\pi/2$ erhält man wegen der Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} , \tag{22.124}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = -\pi \tag{22.125}$$

das Ergebnis

$$J_\vartheta = 2\pi c_\varphi(-1 + c) \overset{(22.118)}{=} 2\pi(c_\vartheta - c_\varphi) . \tag{22.126}$$

Wir bemerken, daß für die Berechnung der Wirkungsvariablen J_φ und J_ϑ nicht die konkrete Form des Kepler-Potentials eingegangen ist. Die Resultate (22.116) und (22.126) gelten deshalb für jedes zentralsymmetrische Potential, bei dem die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung durch Separation der Variablen gelöst werden kann.

Bei der Berechnung der Wirkungsvariable J_r in (22.115) ist ebenfalls zu beachten, daß der Impuls

$$p_r \overset{(22.81),(22.101)}{=} \frac{\partial \widetilde{F}_{2r}(r)}{\partial r} \overset{(22.105)}{=} \pm\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))} \tag{22.127}$$

sowohl positiv als auch negativ sein kann. Das in (22.127) eingeführte effektive Potential lautet

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{c_\vartheta^2}{2mr^2} \overset{(22.116),(22.126)}{=} -\frac{\alpha}{r} + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m r^2} . \tag{22.128}$$

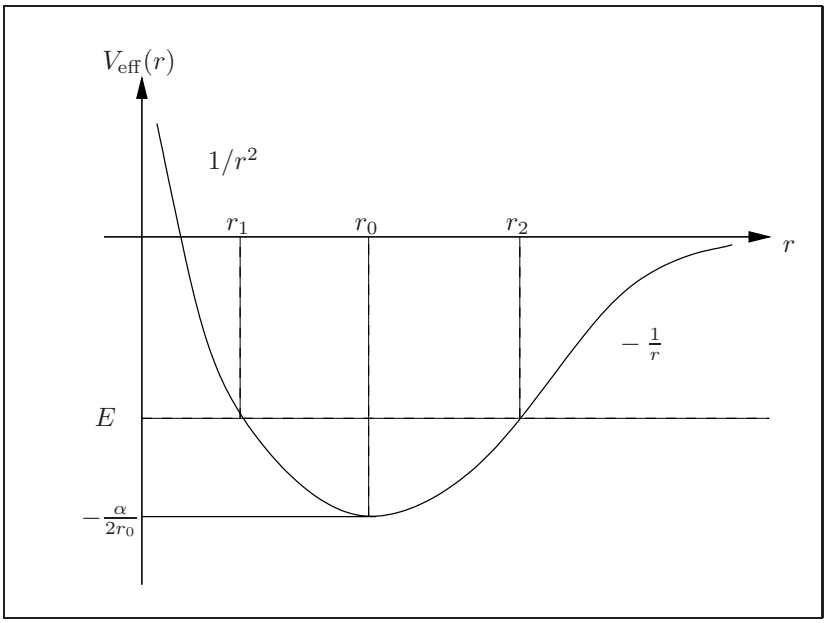
Das effektive Potential (22.128) besitzt ein Minimum bei r_0 mit

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m r_0^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m\alpha} \tag{22.129}$$

und nimmt dort den Wert

$$V_{\text{eff}}(r_0) \overset{(22.128),(22.129)}{=} -\frac{\alpha}{\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m\alpha}} + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m} \frac{16\pi^4 m^2\alpha^2}{(J_\varphi + J_\vartheta)^4} = -\frac{2\pi^2 m\alpha^2}{(J_\varphi + J_\vartheta)^2} \overset{(22.129)}{=} -\frac{\alpha}{2r_0} \tag{22.130}$$

an.



Für gebundene Zustände können wir $E < 0$ voraussetzen, so daß eine periodische Bewegung vorliegt. Die Umkehrpunkte r_1 und r_2 dieser periodischen Bewegung ergeben sich als die Nullstellen des Radikanten in (22.127):

$$E = V_{\text{eff}}(r_{1,2}) \overset{(22.128)}{\Rightarrow} E + \frac{\alpha}{r_{1,2}} - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m r_{1,2}^2} = 0\,. \tag{22.131}$$

Wertet man das Umlaufintegral (22.115) aus, so muß man in (22.127) für das Integral von r_1 nach r_2 das positive und für das Integral von r_2 nach r_1 das negative Vorzeichen verwenden. Deshalb ist nach (22.115), (22.127) und (22.128) zu berechnen

$$J_r = 2\sqrt{2m}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{Er^2 + \alpha r - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m}}\,\frac{dr}{r}\,. \tag{22.132}$$

Aus den Formeln (2.261), (2.266) und (2.267.1) der Integraltafel von Gradshteyn und Ryzhik lesen wir ab

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}dx \;&=\; \sqrt{a+bx+cx^2} - \sqrt{-a}\arcsin\frac{2a+bx}{x\sqrt{b^2-4ac}} \\ &\quad -\frac{b}{2\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}, \qquad a<0,\ c<0,\ b^2-4ac>0\end{aligned} \tag{22.133}$$

Mit den Identifikationen

$$a = -\frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m} < 0, \quad b = \alpha\,, \quad c = E < 0, \quad b^2 - 4ac = \alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m} > 0 \tag{22.134}$$

erhalten wir aus (22.132) und (22.133)

$$\begin{aligned} J_r &= 2\sqrt{2m}\left[\sqrt{Er^2+\alpha r-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m}}-\frac{J_\varphi+J_\vartheta}{2\pi\sqrt{2m}}\arcsin\frac{\alpha r-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}\right.\\ &\quad\left.-\frac{\alpha}{2\sqrt{-E}}\arcsin\frac{2Er+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}\right]_{r_1}^{r_2}\\ &\overset{(22.131)}{=} -2\sqrt{2m}\left\{\frac{J_\varphi+J_\vartheta}{2\pi\sqrt{2m}}\left(\arcsin\frac{\alpha r_2-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_2\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}-\arcsin\frac{\alpha r_1-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_1\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}\right)\right.\\ &\quad\left.-\frac{\alpha}{2\sqrt{-E}}\left(\arcsin\frac{2Er_2+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}-\arcsin\frac{2Er_1+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{22.135}$$

Die Differenzen zweier arcsin-Funktionen berechnen sich gemäß

$$\arcsin x-\arcsin y=\alpha+\beta\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), \tag{22.136}$$

wobei für die Parameter α und β die Fallunterscheidungen

	α	β
$xy\geq 0$ oder $x^2+y^2\leq 1$	0	1
$x>0$, $y<0$ und $x^2+y^2>1$	π	-1
$x<0$, $y>0$ und $x^2+y^2>1$	-π	-1

gelten. Für die erste Differenz in (22.135) gilt

$$x=\frac{\alpha r_2-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_2\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)E}{2\pi^2 m}}},\quad y=\frac{\alpha r_1-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_1\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}} \tag{22.137}$$

und wir erhalten

$$x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}\left\{\left[\alpha-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m r_2}\right]^2+\left[\alpha-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m r_1}\right]^2\right\}\overset{(22.131)}{=}2, \tag{22.138}$$

wobei die Ungleichungen

$$\alpha r_{1,2}-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}\overset{(22.129)}{=}\alpha(r_{1,2}-r_0)\begin{cases}<0 & \text{für} \quad r_1\\ >0 & \text{für} \quad r_2\end{cases} \tag{22.139}$$

vorliegen. Für die zweite Differenz in (22.135) gilt entsprechend

$$x=\frac{2Er_2+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}},\quad y=\frac{2Er_1+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}}, \tag{22.140}$$

so daß wir

$$x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2 m}}\left[(2Er_2+\alpha)^2+(2Er_1+\alpha)^2\right]\overset{(22.131)}{=}2 \tag{22.141}$$

und die Ungleichungen

$$2Er_{1,2}+\alpha\overset{(22.129),(22.131)}{=}\alpha\left(\frac{r_0}{r_{1/2}}-1\right)\begin{cases}>0 & \text{für} \quad r_1\\ <0 & \text{für} \quad r_2\end{cases} \tag{22.142}$$

erhalten. Demnach folgt aus (22.135)-(22.142)

$$
\begin{aligned}
J_r &= -2\sqrt{2m}\left\{\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi m}\left[\pi-\arcsin\left(\frac{\alpha r_2-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2m}}{r_2\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\sqrt{1-\frac{\left(\alpha r_1-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2m}\right)}{r_1^2\left(\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}\right)}}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{\alpha r_1-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2m}}{r_1\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\sqrt{1-\frac{\left(\alpha r_2-\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2}{4\pi^2m}\right)^2}{r_2^2\left(\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}\right)}}\right)\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{\alpha}{2\sqrt{-E}}\left[-\pi-\arcsin\left(\frac{2Er_2+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\sqrt{1-\frac{(2Er_1+\alpha)^2}{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{2Er_1+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\sqrt{1-\frac{(2Er_2+\alpha)^2}{\alpha^2+\frac{(J_\varphi+J_\vartheta)^2E}{2\pi^2m}}}\right)\right]\right\}\overset{(2.490)}{=}-(J_\varphi+J_\vartheta)+\pi\alpha\sqrt{\frac{2m}{-E}}\,. \qquad (22.143)
\end{aligned}
$$

Da die neue Hamilton-Funktion $\widetilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r)$ mit der Energie E identifiziert werden kann, folgt aus (22.143)

$$\widetilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r) = -\frac{2\pi^2 m\alpha^2}{(J_\varphi+J_\vartheta+J_r)^2}\,. \qquad (22.144)$$

Da die drei Wirkungsvariablen J_φ, $J_\vartheta$und J_r gleichberechtigt in der neuen Hamilton-Funktion (22.144) auftreten, sind die drei Frequenzen

$$\nu_\varphi \overset{(22.80)}{=} \frac{\partial\widetilde{H}(J_\varphi,J_\vartheta,J_r)}{\partial J_\varphi},\quad \nu_\vartheta \overset{(22.80)}{=} \frac{\partial\widetilde{H}(J_\varphi,J_\vartheta,J_r)}{\partial J_\vartheta},\quad \nu_r \overset{(22.80)}{=} \frac{\partial\widetilde{H}(J_\varphi,J_\vartheta,J_r)}{\partial J_r} \qquad (22.145)$$

der periodischen Bewegung gleich

$$\nu=\nu_\varphi=\nu_\vartheta=\nu_r=\frac{4\pi^2 m\alpha}{(J_\varphi+J_\vartheta+J_r)^3}\,. \qquad (22.146)$$

Man spricht deshalb auch davon, daß diese Bewegung entartet ist. Für die Periodendauer erhalten wir

$$T=\frac{1}{\nu}\overset{(22.143),(22.146)}{=}\frac{1}{4\pi^2 m\alpha^2}\left(\frac{2\pi^2 m\alpha^2}{-E}\right)^{\frac{3}{2}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{-2E^3}}\,. \qquad (22.147)$$

Der Vergleich mit (22.22) und (22.24) zeigt, daß (22.147) dem dritten Keplerschen Gesetz entspricht (vgl. Abschnitt 8.3).

Index

Arbeit, 21
  virtuelle Verrückung, 146
  Wegunabhängigkeit, 22, 24

Bahnkurve, 13
begleitendes Dreibein, 13, 18
Beschleunigung
  generalisierte, 154
bewegte Ladung, 154
Bewegungsgleichung, 153, 155
Bewegungsgleichungen, 158
Bogenlänge, 14–18
Brachistochronen-Problem, 162, 166
Brachistrochronen-Problem, 162

Christoffel-Symbol, 159

D'Alembert-Prinzip, 145, 146, 148, 152, 153
Dispersionsrelation, 109, 110, 112
Drehimpuls, 160

Eichtransformation
  elektromagnetische, 156
  mechanische, 155, 156, 170
elektromagnetisches Feld, 154–156, 181
elliptisches Integral, 52
Energie
  kinetische, 21, 25, 26, 69, 123, 124, 149, 153, 158, 159, 170
  potentielle, 25, 159, 169, 170
Energieerhaltung, 162
Energieerhaltungssatz, 149
Energiesatz, 148
Erhaltung der Energie, 160
Erhaltungsgröße, 160
Euler-
  Gleichung, 162, 164
  Lagrange-Gleichungen, 170, 174, 175
  Langrange-Gleichungen, 170
  Winkel, 136, 138–140, 159, 160
explizite Abhängigkeit, 160

Feld
  elektrisches, 156
  magnetisches, 156
Feldstärke
  elektrische, 154
  magnetische, 154
Fourier-Transformation, 43, 46, 108
Freiheitsgrade, 123, 151, 197
Frenetsche Formeln, 17, 18
Funktional, 161
Funktionalableitung, 164

Geodäte, 158
Geodätengleichung, 159
Geschwindigkeit
  generalisierte, 153–156

Hamilton-
  Funktion, 177, 179, 181, 205, 210
  Gleichungen, 179, 180
  Mechanik, 177, 189
  Prinzip, 161, 169–171, 173, 174, 180, 189, 190, 194
Hamilton-Jacobi-
  Gleichung
    zeitabhängig, 199, 200, 202
    zeitunabhängig, 200–202, 204, 205, 210, 213
  Theorie, 199
    zeitabhängig, 199
Hauptachsensystem, 139
Hauptachsentransformation, 128
holonom, 147

Impuls
  kanonisch konjugierter, 160
Integrabilitätsbedingung, 147, 197
Invarianz, 156

Jacobi-
  Determinante, 126, 186, 187
  Identität, 182, 183

kanonische Transformation, 189, 190, 192–194, 196, 197, 199, 201
kartesische Koordinaten, 42
kinetische Energie, 21, 25, 26, 69, 123, 124, 149, 153, 158, 159, 170
konservativ, 148
Koordinate

zyklische, 160, 175, 201
Koordinaten
generalisierte, 151, 153, 155, 156
kartesische, 42
Koordinatensystem, 4, 6, 10–13, 18, 49
Koordinatentransformation, 10, 12, 95, 101, 103, 126, 185, 186
Kräfte
generalisierte, 152, 154, 157
Krümmung, 16, 18
Kraft
Lorentz-, 181
Trägheit-, 146, 152
Trägheits-, 118
Kreisel
Definition, 123
kräftefreier symmetrischer, 133
Lagrange-, 138
oblater, 134, 135
prolater, 134, 135
schwerer symmetrischer, 138, 159
unsymmetrischer, 159
Kronecker-Symbol, 6

Lagrange-
Funktion, 154–156, 158–161, 169–171, 175, 177, 179–181, 183, 189, 200, 205, 209, 210
schwerer symmetrischer Kreisel, 159
Gleichungen
erster Art, 147, 148, 151
schwerer symmetrischer Kreisel, 160
zweiter Art, 151, 154–157, 160, 169, 170, 177, 179, 180, 189
Klammer, 195, 196
fundamentale, 196
Kreisel, 138
Mechanik, 151, 177, 189
Lagrange-Funktion, 179
Legendre-Transformation, 177–181, 184, 192–194, 203, 205, 210
Levi-Cività-Tensor, 7, 12, 117
Liouvillescher Satz, 185, 187
Liouvillscher Satz, 183
Lorentz-Kraft, 154, 181

Masse
schwere, 20
träge, 20
mathematisches Pendel, 49
Mechanik
Hamilton, 177, 189
Lagrange, 177, 189
Metrik, 158

Newtonsche
Mechanik, 1
Newtonsche Bewegungsgleichung, 145
nichtholonome Zwangsbedingung, 147
Noether-Theorem, 173, 175

Oszillator
getriebener harmonischer, 170

Poisson-
Klammer, 181–183, 195–197
fundamentale, 182, 197, 198
Invarianz, 198
Poissonscher Satz, 183
Polarkoordinaten, 42
Potential, 148, 154
generalisiertes, 154, 157, 158
skalares, 154
potentielle Energie, 25, 159, 169, 170
Prinzip
D'Alembert, 145, 146, 148, 152, 153
Hamilton, 161, 169–171, 173, 174, 180, 189, 190, 194
kleinste Wirkung, 170
Superpositions-, 20, 113
virtuelle Arbeit, 146
Punktmasse, 154
Punkttransformation, 156, 157, 189

Relativkoordinaten, 66
rheonome Zwangsbedingung, 147
Rotation, 123

Satz von
Liouville, 183, 185, 187
Poisson, 183
Schwarz, 100, 147, 153, 155, 195
Steiner, 125, 126
Stokes, 24
Schwarz, 147
Schwarzscher Satz, 100, 147, 153, 155, 195
schwere Masse, 20
Schwerpunktkoordinaten, 66
Separation der Variablen, 51, 69, 112, 113, 141, 203–205, 213
skleronome Zwangsbedingung, 147
Stationarität eines Funktionales, 165
statischen Gleichgewicht, 146
Steinerscher Satz, 125, 126
Stokesscher Satz, 24
Superpositionsprinzip, 20, 113
Symmetrie, 156

Taylor-Entwicklung, 30, 52, 100, 111, 122, 173, 174, 186

Teilchen
    geladenes nichtrelativistisches, 156
Tensor
    Levi-Cività, 7, 117
    Levi-Civit‘a, 12
Torsion, 17, 18
träge Masse, 20
Trägheitskräfte, 118
Trägheitskraft, 146, 152
Transformation, 155
    Fourier, 43, 46, 108
    infinitesimale, 173, 174
    kanonische, 189, 190, 192–194, 196, 197, 199, 201
    Legendre, 177–181, 184, 192–194, 203, 205, 210

Variationsrechnung, 161
Vektorpotential, 154
virtuelle Verrückungen, 145, 152

Wellengleichung, 112–114
Wirkung, 170

Zwangsbedingungen, 145, 147
    holonome, 151, 158
    keine, 154
    nichtholonome, 147
    rheonome, 147, 151
    skleronome, 147
    skleronome holonome, 158
Zwangskräfte, 145, 152
Zwangskraft, 146
zyklische Koordinate, 160, 175, 201
Zykloide, 167